Problema 2. Se consideră mulţimile $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \; x^2 + a|x| + b = 0\}$ şi $B = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \; [x]^2 + m\,[x] + n = 0\right\}$, cu $a, b, m, n \in \mathbb{R}$, $n \geqslant 0$.
Dacă mulţimea $A \cap B$ are 4 elemente, demonstraţi că $a \in (-2, 0)$.
(Am notat cu $[\alpha]$ partea întreagă a numărului real α .)

* * *

Soluţie. Dacă $b = 0$, atunci mulţimea A are cel mult trei elemente, deci $A \cap B$ nu poate avea 4 elemente, ceea ce nu convine. Aşadar $b \neq 0$.
Cum A are cel mult 4 elemente, din ipoteză rezultă că $A \subset B$.

În A, avem $|x|^2 + a\,|x| + b = 0$, prin urmare $x \neq 0$. Pentru ca ecuaţia precedentă să aibă două soluţii, trebuie ca $\Delta = a^2 - 4b > 0$.

Obţinem $|x| = \dfrac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2} > 0$, deci $-a - \sqrt{a^2 - 4b} > 0$, aşadar $a < 0$. Cum $-a > \sqrt{a^2 - 4b}$, deci $a^2 > a^2 - 4b$, rezultă că $b > 0$.

Fie $\alpha \in A$. Observăm că $\alpha \in A \Leftrightarrow -\alpha \in A$.

I. Dacă $\alpha \in A \cap \mathbb{Z}^*$, cum $-\alpha \in A$, avem $\alpha^2 + m\alpha + n = 0$ şi $\alpha^2 - m\alpha + n = 0$ şi scăzând aceste egalităţi obţinem $2m\alpha = 0$, deci $m = 0$. Prin urmare, $\alpha^2 + n = 0$ şi cum $n \geqslant 0$, rezultă $\alpha = 0$, contradicţie cu faptul că $\alpha \in \mathbb{Z}^*$.

II. Dacă $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ şi $[\alpha] = k \in \mathbb{Z}$, atunci $[-\alpha] = -k - 1$.

Din $\alpha \in B$ deducem că $k^2 + mk + n = 0$, (1) iar din $-\alpha \in B$ obţinem că $(-k-1)^2 + m\,(-k-1) + n = 0$, adică $k^2 + (2-m)\,k + 1 - m + n = 0$. (2)

Scăzând din (2) egalitatea (1), rezultă $(1-m)\,(2k+1) = 0$, aşadar $m = 1$. Prin urmare, $k^2 + k + n = 0$, deci $n \in \mathbb{N}$. Deoarece $\Delta = 1 - 4n \geqslant 0$, cum $n \in \mathbb{N}$, deducem că $n = 0$, deci $k^2 + k = 0$, adică $k = [\alpha] \in \{-1, 0\}$. În consecinţă, $\alpha \in (-1, 1) \setminus \{0\}$.

Deducem că $\dfrac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2} < 1$, deci $-a + \sqrt{a^2 - 4b} < 2$, prin urmare $-a < 2$, adică $a \in (-2, 0)$.

Observaţie. Există a, b, m, n pentru care $A \cap B$ are 4 elemente. De exemplu, pentru $a = -1$, $b = \dfrac{1}{8}$, $m = 1$ şi $n = 0$, obţinem $A = \left\{\pm\dfrac{2 \pm \sqrt{2}}{4}\right\} \subset B$.