P2. Calculaţi determinantul matricei $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, cu

$$a_{ij} = \begin{cases} (-1)^{i+j}a & , \text{dacă } i < j \\ x & , \text{dacă } i = j \\ (-1)^{i+j}b & , \text{dacă } i > j. \end{cases}$$

S. Notând Δ_n determinantul matricei date de dimensiune $n \times n$, avem:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} x & -a & a & \dots & (-1)^n a & (-1)^{n+1}a \\ -b & x & -a & \dots & (-1)^{n-1}a & (-1)^n a \\ b & -b & x & \dots & (-1)^{n-2}a & (-1)^{n-1}a \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ (-1)^n b & (-1)^{n-1}b & (-1)^{n-2}b & \dots & x & -a \\ (-1)^{n+1}b & (-1)^n b & (-1)^{n-1}b & \dots & -b & x \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x & x-a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -b & x-b & x-a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b & 0 & x-b & x-a & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ (-1)^n b & 0 & 0 & \dots & 0 & x-b & x-a \\ (-1)^{n+1}b & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x-b \end{vmatrix} = (x-b)\cdot\Delta_{n-1} + b\cdot(x-a)^{n-1} \quad, (\forall)n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

Deoarece $\Delta_1 = x = (x-b)\cdot 1 + b \cdot 1$, notând $\Delta_0 = 1$, relaţia de recurenţă

$$\Delta_n = (x-b)\cdot\Delta_{n-1} + b\cdot(x-a)^{n-1}$$

are loc pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Obţinem că

$$\Delta_n = (x-b)^n + b \cdot \sum_{k=0}^{n-1}(x-b)^{n-1-k}(x-a)^k \quad, (\forall)n \in \mathbb{N}^*.$$

Dacă $a \neq b$, rezultă că

$$\Delta_n = \frac{a\cdot(x-b)^n - b\cdot(x-a)^n}{a-b},$$

iar dacă $a = b$, atunci

$$\Delta_n = (x-a)^{n-1}(x+(n-1)a).$$