Problema 1. Fie AB_1B_2C, CA_1A_2B, BC_1C_2A, pătratele construite spre exterior (sau spre interior) pe laturile AC, CB, BA ale unui triunghi dreptunghic BAC ($\widehat{A} = 90°$). Să se construiască triunghiul dreptunghic BAC când se cunosc lungimile segmentelor B_1C_2, C_1A_2, A_1B_2.

* * *

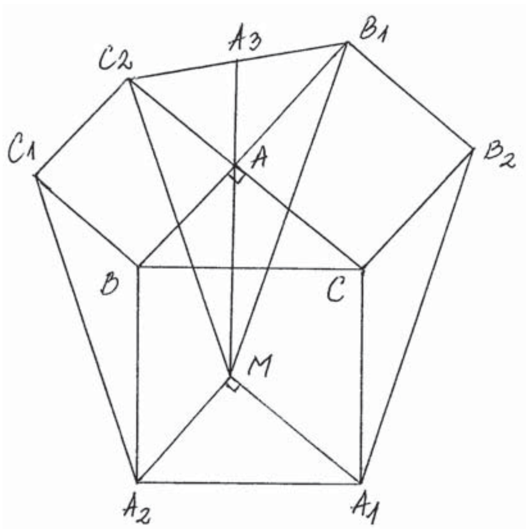

Figura 1

Construim ΔA_2MA_1, unde $A_2M \| BA$ şi $A_1M \| CA$, de unde rezultă (datorită faptului că $BC = A_2A_1$ şi $BC \| A_2A_1$) $\Delta A_2MA_1 \equiv \Delta BAC \Rightarrow$

$MA_1 \equiv AC$ şi $MA_2 \equiv AB$. $\quad (*)$

Unim M cu B_1 şi M cu C_2 şi obţinem ΔMB_1C_2. În acest triunghi avem:

$\star$ Deoarece $\Delta B_1AC_2 \equiv \Delta CAB$ ($B_1A \equiv AC$ ip., $C_2A \equiv BA$ ip., $\widehat{A} = \widehat{A}$ o.v.) $\Rightarrow B_1C_2 \equiv BC$. (1)

$\star$ Deoarece $MA_1 \| CA$ (din construcţie), $CA \| B_1B_2$ (ip.), $CA \equiv B_1B_2$ (ip.) $\overset{(*)}{\Rightarrow} MA_1 \| B_1B_2$ şi $MA_1 \equiv B_1B_2 \Rightarrow MA_1B_2B_1$ paralelogram $\Rightarrow MB_1 \equiv A_1B_2$. (2)

$\star$ Deoarece $MA_2 \| BA$ (din construcţie), $MA_2 \equiv BA$ $(*)$, $BA \| C_1C_2$ (ip.), $BA \equiv C_1C_2$ (ip.) $\Rightarrow MA_2 \| C_1C_2$ şi $MA_2 \equiv C_1C_2 \Rightarrow MA_2C_1C_2$ paralelogram $\Rightarrow MC_2 \equiv A_2C_1$. (3)

Deci, ΔMB_1C_2 are laturile egale cu B_1C_2, C_1A_2 şi A_1B_2, adică triunghiul, de la care pornind, se cere construcţia triunghiului ΔABC.

Să cercetăm acum legătura dintre ΔMB_1C_2 şi ΔABC.

Observăm, din figura 1, că $B_1C_2 = BC, AC_2 = AB, AB_1 = AC$.

Cumva, A, punctul de intersecţie al cevienelor MA, B_1A şi C_2A, ale ΔMB_1C_2, pare să aibă un anumit rol.

Oare acest punct nu este vre-un punct important, sau vre-un punct de intersecţie al unor elemente importante în triunghi?

$* * *$

Cum $AM \| BA_2 \Rightarrow AM \perp BC \Rightarrow \widehat{ACB} = \widehat{BAM}$. (1°)

Fie $A_3 = AM \cap B_1C_2$. Atunci $\widehat{BAM} = \widehat{A_3AB_1}$. (2°)

Dar, cum $\Delta ABC \equiv \Delta AC_2B_1 \Rightarrow \widehat{C_2B_1A} = \widehat{ACB}$. (3°)

Din (1°),(2°), (3°) $\Rightarrow \widehat{A_3AB_1} = \widehat{C_2B_1A} (= \widehat{A_3B_1A}) \Rightarrow AA_3 = A_3B_1$. (4°)

Analog, din relaţiile $\widehat{ABC} = \widehat{MAC}$ $(AM \perp BC)$, $\widehat{MAC} = \widehat{C_2AA_3}$ (o.v), $\widehat{ABC} = \widehat{B_1C_2A} = \widehat{A_3C_2A}$ $(\Delta ABC \equiv \Delta AC_2B_1) \Rightarrow \widehat{A_3C_2A} = \widehat{C_2AA_3} \Rightarrow A_3C_2 = AA_3$. (5°)

Coroborând relaţiile (4°) şi (5°) $\Rightarrow AA_3$ este mediană în $\Delta AB_1C_2 \Rightarrow MA_3$ este mediană în ΔB_1MC_2.

Şi iată cum am arătat că A aparţine medianei MA_3 a triunghiului MB_1C_2.

Este A un punct oarecare pe mediana MA_3? Sau este chiar centrul de greutate al triunghiului MB_1C_2?

Ar fi mai multe căi de a verifica acest aspect. În materialul de faţă am ales să demonstrăm că $AA_3 = \dfrac{AM}{2}$.

$* * *$

Avem $\Delta ABC \equiv \Delta A_2MA_1$ şi $BC = A_2A_1$, de unde rezultă $BA \| A_2M$ şi $BA = A_2M$, ceea ce arată că ABA_2M este paralelogram $\Rightarrow$ avem următorul şir de egalităţi: $AM = A_2B = BC = C_2B_1$. Dar $C_2B_1 = 2AA_3 \Rightarrow AM = 2AA_3 \Rightarrow A$ împarte mediana AA_3 a triunghiului MB_1C_2 în raportul $\frac{1}{2} \Rightarrow A$ este centrul de greutate al triunghiului MB_1C_2.

Din acest punct al rezolvării, ne putem concentra direct pe cerinţa problemei, deoarece avem câteva informaţii cheie, oferite de figura 1.

Astfel, triunghiul ABC cerut este ,,încadrat" în triunghiul MB_1C_2 (totuna cu triunghiul format de laturile B_1C_2, C_1A_2 şi A_1B_2!), astfel încât BC este B_1C_2, iar vârful A este localizat în centrul de greutate al triunghiului MB_1C_2.

* * *

În cele ce urmează, vom expune detaliat construcţia ΔABC, pornind de la ΔMB_1C_2.

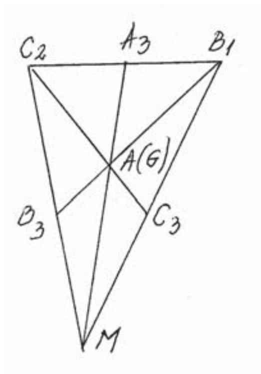

Figura 2

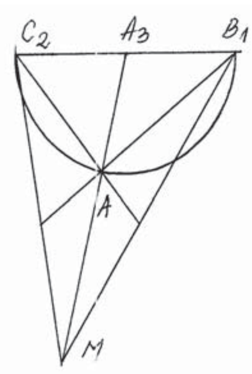

Figura 3

Fie dat ΔMB_1C_2, ca în figura 2.

Construim A_3, mijlocul laturii B_1C_2, C_3 mijlocul laturii MB_1 şi B_3 mijlocul laturii MC_2.

Trasând medianele MA_3, C_2C_3 şi B_1B_3, ele se vor intersecta în centrul de greutate al triunghiului MB_1C_2, care este vârful triunghiului ABC cerut.

Observaţie. În figura 2, $AB = B_1C_2, AC = AB_1, BC = B_1C_2$.

Faptul că unghiul $\widehat{A}$ al triunghiului ABC cerut este de $90°$, ne mai oferă o metodă de construcţie, redată în figura 3.

Construim A_3, mijlocul laturii B_1C_2. Construim semicercul de centru A_3 şi rază $A_3B_1 = A_3C_2$.

Trasăm mediana A_3M. Aceasta va tăia semicercul în punctul A, vârful triunghiului ABC cerut.

Observaţie. Elementele cheie utilizate în construcţia figurii 3 au fost: MA_3 *mediană;* $\widehat{C_2AB_1} = 90°$, *adică* A *se mişcă pe cercul de rază* $\dfrac{B_1C_2}{2}$.

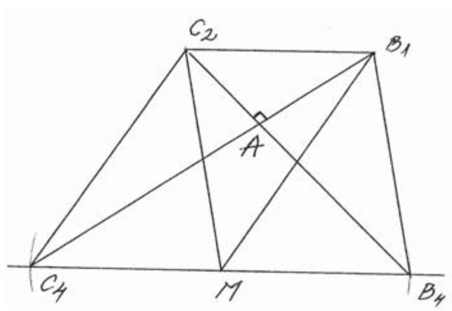

Figura 4

Fie ΔMB_1C_2 dat. Prin M trasăm o paralelă la B_1C_2, pe care construim segmentele $MC_4 = MB_4 = B_1C_2$, de o parte şi de alta a lui M.

Deoarece $B_1C_2 \| MB_4$ şi $B_1C_2 = MB_4 \Rightarrow MB_4B_1C_2$ este paralelogram $\Rightarrow C_2A$ taie diagonala MB_1 la jumătate. (#)

Deoarece $B_1C_2 \| MC_4$ şi $B_1C_2 = MC_4 \Rightarrow MB_1C_2C_4$ este paralelogram $\Rightarrow B_1A$ taie diagonala MC_2 la jumătate. (##)

Din (#) şi (##) rezultă că C_2A şi B_1A sunt mediane în ΔMB_1C_2, rezultă A este centrul de greutate al triunghiului MB_1C_2, adică vârful A al triunghiului ABC cerut, unde, conform figurii, $BC = B_1C_2$.

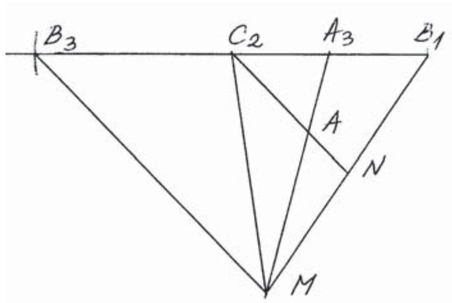

Figura 5

Raportul $\frac{1}{3}$ dat de poziţia centrului de greutate A pe mediana MA_3 ne sugerează o altă cale de construcţie, ca în figura 5.

Fie ΔMB_1C_2 triunghiul dat. Construim A_3, mijlocul segmentului B_1C_2.

În prelungirea laturii B_1C_2, construim segmentul $C_2B_3 = C_2B_1$, B_3 şi B_1 de o parte şi de alta a lui C_2. Unim B_3 cu M şi formăm ΔA_3B_3M, unde $A_3C_2 = \dfrac{A_3B_3}{3}$ (din construcţie).

Prin trasarea unei paralele prin C_2 la B_3M, aceasta va tăia latura A_3M în punctul A, astfel încât $A_3A = \dfrac{A_3M}{3}$, adică A este centrul de greutate al triunghiului MB_1C_2, adică vârful triunghiului ABC cerut.

Observaţie. Din aceeaşi figură 5, se observă rapid şi o altă construcţie.

Fie $AC_2 \cap B_1M = N$. *În* ΔB_1B_3M, C_2 *taie latura* B_1B_3 *în jumătate, şi cum* $C_2N \| B_2M \Rightarrow C_2N$ *linie mijlocie în* $\Delta B_1B_3M \Rightarrow B_1N = NM \Rightarrow C_2N$ *este mediană în triunghiul* MB_1C_2.

Cum A *se află la intersecţia medianelor* A_3M *şi* $C_2N \Rightarrow A$ *este centrul de greutate al* ΔMB_1C_2, *adică vârful* A *al triunghiului* ABC *cerut.*

* * *

În cele ce urmează, vom oferi soluţia pentru cazul în care pătratele sunt construite în interiorul triunghiului ABC.

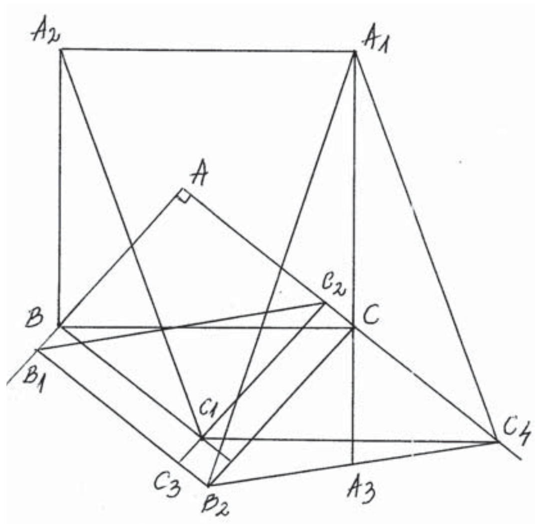

Figura 6

Fie figura 6, realizată cu datele oferite în enunţul problemei.

Prelungim C_2C_1 până intersectează B_1B_2 în C_3.

Deoarece $C_2C_3 \perp B_1B_2$, $B_1C_3 = BC_1 = AB$, $C_2C_3 = CB_2 = AC$ şi $\widehat{B_1C_3B} = \widehat{B_1AC} = 90°$, rezultă $\Delta B_1C_2C_3 \overset{\text{L.U.L.}}{\equiv} \Delta CBA \Rightarrow B_1C_2 = BC$. (1)

Prelungim AC cu $CC_4 = AC_2 = BC_1$.

Deoarece $A_2B = A_1C$, $A_2B \| A_1C$, $BC_1 = CC_4$ şi $BC_1 \| CC_4$, rezultă $\Delta A_2BC_1 \equiv \Delta A_1CC_4 \Rightarrow A_2C_1 = A_1C_4$. (2)

Deoarece $CC_4 = AC_2$, $CB_2 = AB_1$, $CC_4 \| AC_2$ şi $CB_2 \| AB_1$, rezultă $\Delta CB_2C_4 \equiv \Delta AB_1C_2 \Rightarrow B_2C_4 = B_1C_2 = BC$. (3)

Din (1), (2) si (3) rezultă $\Delta A_1B_2C_4$ este acelaşi cu triunghiul format de laturile A_1B_2, B_1C_2 şi C_1A_2.

Se observă că, deoarece $\Delta B_2C_4C \equiv \Delta ABC$ ($B_2C_4 = B_1C_2 = BC$, $C_4C = AC_2 = AB$, $B_2C = AB_1 = AC$), putem spune că $\Delta A_1C_4B_2$ are ,,integrat" ΔABC, vârful A fiind înlocuit de vârful C.

Ca şi la rezolvarea pentru cazul construcţiei pătratelor exterioare, încercăm să localizăm vârful C în contextul $\Delta A_1B_2C_4$.

Prelungim A_1C şi obţinem $A_1C \cap B_2C_4 = A_3$.

În acelaşi timp construim diagonala AC_3 a dreptunghiului $AC_2C_3B_1$.

Avem următoarele relaţii:

1) $\widehat{A_3CC_4} + \widehat{B_2CA_3} = 90°$;

2) $\widehat{ACB} = \widehat{CB_2C_4}$ (unghiuri corespondente în triunghiurile congruente ABC şi CC_4B_2);

3) $\widehat{ACB} + \widehat{A_3CC_4} = 180° - \widehat{BCA_3} = 180° - 90° = 90°$;

Din 1), 2) şi 3) rezultă $\widehat{CB_2C_4} = \widehat{B_2CA_3} \Rightarrow CA_3 = B_2A_3$; $(\star)$

4) $\widehat{CC_4B_2} + \widehat{C_4B_2C} = 90° \xRightarrow{1),(\star),\,4)} \widehat{A_3CC_4} = \widehat{CC_4B_2} \Rightarrow CA_3 = A_3C_4$. $(\star\star)$

Din $(\star)$ şi $(\star\star)$ reiese că CA_3 este mediană în $\Delta B_2CC_4 \Rightarrow A_1A_3$ este mediană în $\Delta A_1B_2C_4$.

În plus, $CA_3 = \dfrac{B_2C_4}{2} = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{A_1C}{2}$. Din această ultimă relaţie obţinem $A_3C = \dfrac{A_1C}{2}$, adică C împarte mediana A_1A_3 în raportul $\frac{1}{2} \Rightarrow C$ este centrul de greutate al triunghiului $A_1B_2C_4$.

Astfel, rezultă că ideea de construcţie va fi identică celei aplicate în cazul utilizării pătratelor exterioare laturilor triunghiului ABC, construcţie discutată anterior.

$\blacksquare$