Etapa 3, Problema 2

Se consideră $a, b, c \in \mathbb{C}$ şi funcţia

$$f : D \to \mathbb{C},\ f(z) = z^4 + az^3 + bz^2 + cz + 1,$$

unde $D = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z| = 1 \right\}$. Demonstraţi că $\left| f\left(z\right) \right| \leq 2,\ \forall z \in D$, dacă şi numai dacă $a = b = c = 0$.

Nicolae Bourbăcuţ

Soluţie.

Vom folosi următoarea lemă (a cărei demonstrație o lăsăm ca temă):

Lemă. Fie $r > 0$ şi $u \in \mathbb{C}$ cu $|u| = r$. Dacă $x \in \mathbb{C}$ îndeplineşte condiţiile $|x - u| \leq r$ şi $|x + u| \leq r$, atunci $x = 0$.

Dacă $a = b = c = 0$, atunci $\left| f\left(z\right) \right| = \left| z^4 + 1 \right| \leq \left| z^4 \right| + 1 = 2$.

Reciproc, cum $z \in D \Rightarrow -z \in D$, sunt adevărate inegalitățile

$$\left| z^4 + az^3 + bz^2 + cz + 1 \right| \leq 2, \forall z \in D \quad \text{şi} \quad \left| z^4 - az^3 + bz^2 - cz + 1 \right| \leq 2, \forall z \in D.$$

Rezultă că $\left| z^4 + bz^2 + 1 \right| = \left| \dfrac{f\left(z\right) + f\left(-z\right)}{2} \right| \leq 2$. Luând $z = 1$ şi $z = i$, obţinem că $|b + 2| \leq 2$, respectiv $|b - 2| \leq 2$. Aplicând lema, deducem că $b = 0$.

Rămâne că $\left| z^4 + az^3 + cz + 1 \right| \leq 2, \forall z \in D$. Luând $z = 1$ şi $z = -1$, obţinem că $|a + c + 2| \leq 2$, respectiv $|a + c - 2| \leq 2$. Aplicând lema, deducem că $a + c = 0$.

Relaţia precedentă devine $\left| z^4 + az^3 - az + 1 \right| \leq 2, \forall z \in D$. Luând $z = i$ şi $z = -i$, obţinem că $|a + i| \leq 1$, respectiv $|a - i| \leq 1$. Aplicând lema, deducem că $a = 0$ şi, de aici, concluzia problemei.