Acţiuni de grupuri

lect.dr. Mihai Chiş
Facultatea de Matematică şi Informatică
Universitatea de Vest din Timişoara

Definiţie 1. Fie $(G, \cdot)$ un grup şi $M \neq \emptyset$ o mulţime nevidă. O aplicaţie $\alpha : G \times M \longrightarrow M$ se numeşte *acţiune (la stânga) a lui G pe M* dacă verifică proprietăţile:

$$\begin{array}{ll} 1) & \alpha(gh, m) = \alpha(g, \alpha(h, m)) \quad ,(\forall)g, h \in G, m \in M\,. \\ 2) & \alpha(1, m) = m \quad ,(\forall)m \in M\,. \end{array}$$

Observaţie 2. 1) Dacă notăm $g \cdot m := \alpha(g, m)$, condiţiile de mai sus se pot scrie în forma:

$$\begin{array}{ll} 1) & gh \cdot m = g \cdot (h \cdot m) \quad ,(\forall)g, h \in G, m \in M\,. \\ 2) & 1 \cdot m = m \quad ,(\forall)m \in M\,. \end{array}$$

2) În mod asemănător se poate defini termenul de acţiune la dreapta a unui grup pe o mulţime nevidă, pentru care se pot demonstra proprietăţi analoage celor pe care le vom prezenta pentru acţiuni la stânga. Noi ne vom referi în continuare doar la acţiuni la stânga, pe care le vom numi simplu acţiuni.

Exemplu 3. 1) Fie G un grup şi $H \leq G$. Pe mulţimea claselor laterale la stânga $(G/H)_s$ ale subgrupului în grupul G putem defini acţiunea

$$\alpha : G \times (G/H)_s \longrightarrow (G/H)_s : (g, xH) \longmapsto gxH.$$

Aceasta se numeşte acţiunea naturală a lui G pe $(G/H)_s$.
2) Fie S_X grupul simetric al permutărilor unei mulţimi nevide X, iar $G \leq S_X$ un subgrup al său(G se numeşte un grup de permutări ale mulţimii X). Atunci G acţionează pe X prin

$$\alpha : G \times X \longrightarrow X : (g, x) \longmapsto g(x).$$

(acţiunea de evaluare)
3) Fie G un grup. G acţionează pe mulţimea propriilor sale elemente prin

$$\alpha : G \times G \longrightarrow G : (g, x) \longmapsto gxg^{-1} \overset{\text{not}}{=} {}^g x.$$

(acţiunea de conjugare)
4) Un grup G acţionează prin conjugare şi asupra mulţimii $\mathcal{P}^*(G)$ a submulţimilor sale nevide:

$$\alpha : G \times \mathcal{P}^*(G) \longrightarrow \mathcal{P}^*(G) : (g, A) \longmapsto gAg^{-1} \overset{\text{not}}{=} {}^g A.$$

De asemenea, asupra mulţimii $\mathcal{S}(G)$ a subgrupurilor sale:

$$\alpha : G \times \mathcal{S}(G) \longrightarrow \mathcal{S}(G) : (g, H) \longmapsto gHg^{-1} \overset{\text{not}}{=} {}^{g}H.$$

Definiţie 4. Dacă $\alpha : G \times M \longrightarrow M : (g, m) \longmapsto \alpha(g, m) \overset{\text{not}}{=} g \cdot m$ este o acţiune, definim pe M *relaţia* $\sim_\alpha$ *de asociere în raport cu* α prin

$$x \sim_\alpha y \overset{\text{def}}{=} (\exists) g \in G : g \cdot x = y\,.$$

Propoziţie 5. *Dacă* $\alpha : G \times M \longrightarrow M : (g, m) \longmapsto \alpha(g, m) \overset{not}{=} g \cdot m$ *este o acţiune, relaţia de asociere în raport cu acţiunea* α *este o relaţie de echivalenţă pe* M*.*

Definiţie 6. Clasa de echivalenţă a unui element $x \in M$ în raport cu relaţia $\sim_\alpha$ se numeşte *orbita elementului* x *în raport cu acţiunea* α.

Observaţie 7. Orbita unui element oarecare $x \in M$ în raport cu o acţiune $\alpha : G \times M \longrightarrow M$ este

$$\begin{aligned}&[x]_{\sim_\alpha} = \{y \in M |\, x \sim_\alpha y\} = \{y \in M |\, (\exists) g \in G : y = g \cdot x\} = \\ &= \{g \cdot x |\, g \in G\} \overset{\text{not}}{=} G \cdot x\,.\end{aligned}$$

Exemplu 8. 1) Orbita unui element $x \in G$ în raport cu acţiunea prin conjugare se numeşte clasa de conjugare a elementului x, notată ${}^{G}x$ sau x^G.
2) Orbita unei clase laterale xH în raport cu acţiunea naturală a unui grup G pe multz imea $(G/H)_s$ a claselor laterale la stânga în raport cu un subgrup H al său este întreaga mulţime $(G/H)_s$. O acţiune care determină o singură orbită în mulţimea suport a acţiunii se numeşte acţiune tranzitivă.

Definiţie 9. Stabilizatorul unui element $x \in M$ în raport cu o acţiune $\alpha : M \times G \longrightarrow M$ este mulţimea

$$Stab_G(x) := \{g \in G |\, g \cdot x = x\}\,.$$

Exemplu 10. 1) Pentru acţiunea unui grup prin conjugare pe el însuşi, stabilizatorul unui element $x \in G$ este centralizatorul elementului:

$$C_G(x) = \{g \in G|{}^{g}x = x\} = \{g \in G|gx = xg\}.$$

2) Pentru acţiunea prin conjugare a unui grup pe mulţimea submulţimilor sale nevide, stabilizatorul unei submulţimi $A \subseteq G$ este normalizatorul submulţimii:

$$N_G(A) = \{g \in G|{}^{g}A = A\} = \{g \in G|gA = Ag\}.$$

3) Pentru acţiunea naturală a unui grup G pe mulţimea $(G/H)_s$ a claselor laterale la stânga ale unui subgrup $H \le G$, stabilizatorul clasei H este chiar H.

Propoziţie 11. *Stabilizatorul* $Stab_G(x)$ *al unui element* $x \in M$ *în raport cu o acţiune* $\alpha : G \times M \longrightarrow M$ *a unui grup* $(G, \cdot)$ *pe o mulţime* M *este un subgrup al grupului* G*.*

Observaţie 12. Dacă $\alpha : G \times M \longrightarrow M : (g, x) \longmapsto g \cdot x$ este o acţiune, atunci pentru orice $g, h \in G$ şi $x \in M$ au loc echivalenţele:

$$g \cdot x = h \cdot x \Longleftrightarrow h^{-1}g \cdot x = x \Longleftrightarrow h^{-1}g \in Stab_G(x) \Longleftrightarrow g \cdot Stab_G(x) = h \cdot Stab_G(x).$$

Prin urmare, are loc şi $g \cdot x \neq h \cdot x \Longleftrightarrow g \cdot Stab_G(x) \neq h \cdot Stab_G(x)$.

Obţinem astfel următoarea proprietate:

Propoziţie 13. *Cardinalul orbitei unui element $x \in M$ în raport cu o acţiune $\alpha : G \times M \longrightarrow M$ este egal cu indicele stabilizatorului elementului:*

$$|G \cdot x| = [G : Stab_G(x)]\,.$$

Corolar 14. *Dacă M este o mulţime finită, iar $\mathcal{R}$ un sistem de reprezentanţi ai orbitelor definite de acţiunea $\alpha : G \times M \longrightarrow M$ pe M, atunci*

$$|M| = \sum_{x \in \mathcal{R}} [G : Stab_G(x)]$$

*(**ecuaţia claselor asociată acţiunii** α).*

Exemplu 15. Pentru acţiunea prin conjugare a unui grup G asupra elemntelor sale, notând cu $\mathcal{K}$ un sistem de reprezentanţi ai claselor de conjugare, avem atunci:

$$|G| = \sum_{x \in \mathcal{K}} [G : C_G(x)]$$

(**ecuaţia claselor grupului** G).

Observaţie 16. Dacă $x, y \in M$ sunt asociate în raport cu acţiunea α, cu $y = g \cdot x$, atunci

$$h \in Stab_G(y) \Longleftrightarrow h \cdot y = y \Longleftrightarrow hg \cdot x = g \cdot x \Longleftrightarrow g^{-1}hg \cdot x = x \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow g^{-1}hg \in Stab_G(x) \Longleftrightarrow h \in g \cdot Stab_G(x) \cdot g^{-1}.$$

Prin urmare, obţinem proprietatea următoare:

Propoziţie 17. *Dacă $\alpha : G \times M \longrightarrow M$ este o acţiune a unui grup G pe o mulţime M, $g \in G$, $x \in M$, iar $y = g \cdot x$, atunci*

$$Stab_G(y) = g \cdot Stab_G(x) \cdot g^{-1}.$$

Corolar 18. *Dacă $x, y \in M$ au proprietatea că $x \cdot G = y \cdot G$, atunci $Stab_G(x) \cong Stab_G(y)$.*

Definiţie 19. Dacă $\alpha : G \times M \longrightarrow M$ este o acţiune a unui grup G pe o mulţime M, iar $g \in G$, notăm cu $Fix(g)$ mulţimea punctelor fixe în raport cu g prin acţiunea α:

$$Fix(g) := \{x \in M | \, g \cdot x = x\}\,.$$

Observaţie 20. Pentru $x \in M$ şi $g \in G$ avem că

$$x \in Fix(g) \Longleftrightarrow g \cdot x = x \Longleftrightarrow g \in Stab_G(x)\,.$$

Definiţie 21. Pentru o acţiune $\alpha : G \times M \longrightarrow M : (g, x) \longmapsto g \cdot x$ vom nota cu $Fix(\alpha)$ mulţimea punctelor fixe în raport cu acţiunea α:

$$Fix(\alpha) = \bigcap_{g \in G} Fix(g) = \{x \in M | g \cdot x = x\}.$$

Observaţie 22. 1) Evident are loc echivalenţa

$$x \in Fix(\alpha) \Longleftrightarrow Stab_G(x) = G.$$

2) De asemenea,

$$x \in Fix(\alpha) \Longleftrightarrow G \cdot x = \{x\}.$$

Corolar 23. *Dacă $\alpha : G \times M \longrightarrow M : (g, x) \longmapsto g \cdot x$ este o acţiune, iar $\mathcal{R}$ un sistem de reprezentanţi ai orbitelor acţiunii în mulţimea M, atunci $Fix(\alpha) \subseteq \mathcal{R}$.*

Corolar 24. *Ecuaţia claselor asociată unei acţiuni $\alpha : G \times M \longrightarrow M : (g, x) \longmapsto g \cdot x$ se poate scrie atunci în forma*

$$|M| = |Fix(\alpha)| + \sum_{x \in \mathcal{R}^*} [G : Stab_G(x)],$$

unde $\mathcal{R}^* = \mathcal{R} \setminus Fix(\alpha)$.

Observaţie 25. Pentru acţiunea prin conjugare a unui grup G pe el însuşi, mulţimea punctelor fixe este centrul grupului G:

$$Z(G) = \{z \in G | gz = zg, (\forall) g \in G\}.$$

Dacă $\mathcal{K}$ este un sistem de reprezentanţi ai claselor de conjugare, atunci $Z(G) \subseteq \mathcal{K}$. Notăm $\mathcal{K}^* = \mathcal{K} \setminus Z(G)$.

Corolar 26. ecuaţia claselor grupului G

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{x \in \mathcal{K}^*} [G : C_G(x)].$$

Definiţie 27. Fie p un număr prim. Un grup de ordin p^n, unde $n \in \mathbb{N}$ este un număr natural, se numeşte un $p-$grup.

Observaţie 28. Orice subgrup al unui $p-$grup este de asemenea un $p-$grup. Indicele oricărui subgrup al unui $p-$grup este o putere a lui p.

Propoziţie 29. *Fie $\alpha : G \times M \longrightarrow M : (g, x) \longmapsto g \cdot x$ o acţiune a unui $p-$grup G pe o mulţime finită M. Atunci*

$$|Fix(\alpha)| \equiv |M| (mod\ p).$$

Corolar 30. *Dacă G este un $p-$grup, atunci $p \mid |Z(G)|$. În particular, $|Z(G)| \geq p$.*

Observaţie 31. Fie G un grup finit, iar p un număr prim care divide ordinul $|G|$ al grupului G. Considerând mulţimea $M = \{(x_1, x_2, \ldots, x_p) \in G^p | x_1 x_2 \ldots x_p = 1\}$, grupul aditiv $\mathbb{Z}_p$ acţionează pe M prin

$$\alpha : \mathbb{Z}_p \times M \longrightarrow M : (\hat{k}, (x_1, x_2, \ldots, x_p)) \longmapsto (x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_{k+p}) .$$

Atunci $|M| = |G|^{p-1}$, astfel că $p \mid |Fix(\alpha)|$. Cum $(1, 1, \ldots, 1) \in Fix(\alpha)$, rezultă că $Fix(\alpha) = \{(x, x, \ldots, x) \in G^p | x^p = 1\} \neq \emptyset$ şi numărul soluţiilor ecuaţiei $x^p = 1$ este un multiplu de p.

Corolar 32. (**teorema lui Cauchy**) *Dacă G este un grup finit, cu ordinul divizibil prin numărul prim p, atunci există în grupul G elemente de ordin p.*

Observaţie 33. Fie $\alpha : G \times M \longrightarrow M : (g, x) \longmapsto g \cdot x$ o acţiune, iar $\mathcal{F} \subseteq G \times M$ mulţimea

$$\mathcal{F} = \{(g, x) \in G \times M | g \cdot x = x\}.$$

Evident,

$$\mathcal{F} = \bigcup_{x \in M} Stab_G(x) \times \{x\} = \bigcup_{g \in G} \{g\} \times Fix(g) ,$$

astfel că

$$|\mathcal{F}| = \sum_{x \in M} |Stab_G(x)| = \sum_{g \in G} |Fix(g)|.$$

Prin urmare,

$$\sum_{g \in G} |Fix(g)| = \sum_{x \in \mathcal{R}} \sum_{y \in G \cdot x} |Stab_G(y)| = \sum_{x \in \mathcal{R}} \sum_{y \in G \cdot x} |Stab_G(x)| =$$

$$= \sum_{x \in \mathcal{R}} [G : Stab_G(x)] \cdot |Stab_G(x)| = \sum_{x \in \mathcal{R}} |G| = |\mathcal{R}||G|.$$

Deoarece $|\mathcal{R}|$ reprezintă numărul orbitelor, rezultă că

Propoziţie 34. (**lema Cauchy-Frobenius**) *Dacă $\alpha : G \times M \longrightarrow M : (g, x) \longmapsto g \cdot x$ este o acţiune a unui grup finit G asupra unei mulţimi M, atunci numărul n al orbitelor acţiunii este dat de*

$$n = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |Fix(g)| .$$