Problema 4
Etapa 1
Clasa a VI-a

Problema 4. Se consideră mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 5a+4, a \in \mathbb{N}\}$, $B = \{y \in \mathbb{N} \mid y = 6b+5, b \in \mathbb{N}\}$ și $C = \{z \in \mathbb{N} \mid z = 30c+29, c \in \mathbb{N}\}$.

Arătați că $A \cap B = C$.

* * *

Soluţie: Trebuie arătat că $A \cap B \subset C$ și $C \subset A \cap B$.

Pentru $A \cap B \subset C$.

Dacă $m \in A \cap B$, atunci $m \in A$ și $m \in B$, adică $m = 5a+4$ (1) și $m = 6b+5$ (2).

Înmulțind relația (1) cu 6 și relația (2) cu 5 avem

$$6m = 30a + 24$$

$$5m = 30b + 25$$

Prin scăderea celor două relații obținem $m = 30(a-b)-1$, de unde $m = 30(a-b)-30+30-1 = 30(a-b-1)+29$. Cum $m = 30c+29$, unde $c = a-b-1$ rezultă $m \in C$.

Prin urmare $A \cap B \subset C$.

Pentru $C \subset A \cap B$.

Dacă $n \in C$, atunci $n = 30c+29$.

Putem scrie $n = 30c+29 = 30c+25+4 = 5(6c+5)+4$, deci $n = 5a+4$, unde $a = 6c+5$, adică $n \in A$ (3).

PUtem scrie $n = 30c+29 = 30c+24+5 = 6(5c+4)+5$, adică $n = 6b+5$, unde $b = 5c+4$, deci $n \in B$ (4).

Din (3) și (4) rezultă $n \in A \cap B$.

Așadar, $C \subset A \cap B$.