P4. a) Determinaţi punctele în care funcţia $f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin^2(x) \cdot \sin(2x)$ îşi atinge valoarea maximă, respectiv minimă.
b) Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi $g_n : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$g_n(x) = |\sin^2(x) \cdot \sin^3(2x) \cdot \sin^3(4x) \cdot \sin^3(8x) \cdot \ldots \cdot \sin^3(2^{n-1}x) \cdot \sin(2^n x)|.$$

Arătaţi că g_n îşi atinge valoarea maximă în $\frac{\pi}{3}$.
c) Arătaţi că

$$\sin^2(x) \cdot \sin^2(2x) \cdot \sin^2(4x) \cdot \sin^2(8x) \cdot \ldots \cdot \sin^2(2^{n-1}x) \cdot \sin^2(2^n x) \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$.