

**PROBLEME  
PENTRU ETAPA JUDEȚEANĂ**

ABSTRACT. În vederea participării cu succes la concursurile școlare prezentăm câteva probleme de concurs însoțite de rezolvări și comentarii.

Lecția se adresează clasei a VI-a

Autor: Ion Cicu, Profesor, Școala nr. 96, București

**Problema 1:** Aflați numerele naturale  $a$  și  $b$  știind că cel mai mic multiplu comun al lor este de 12 ori mai mare decât cel mai mare divizor comun al lor și că  $6a + b = 330$ .

*Etapa pe municipiu, București, 2002*

**Soluție:** Fie  $d = (a, b)$  cel mai mare divizor comun și  $m = [a, b]$  cel mai mic multiplu comun al numerelor  $a$  și  $b$ .

Din enunț avem  $m = 12d$ . (\*)

Se știe, de asemenea că  $md = ab$ , de unde  $m = \frac{ab}{d}$ . (\*\*)

Din cele două relații deducem  $\frac{ab}{d} = 12d$  sau  $ab = 12d^2$ . (\*\*\*)

Acum,  $d = (a, b)$  implică  $a = dx$ ,  $b = dy$  și  $(x, y) = 1$ .

Înlocuind în (\*\*\*) obținem  $d^2xy = 12d^2$ , de unde  $xy = 12$ .

Cum  $(x, y) = 1$  distingem cazurile  $x = 1, y = 12$ ;  $x = 3, y = 4$ ;  $x = 12, y = 1$  și  $x = 4, y = 3$ .

Pentru  $x = 1, y = 12$  avem  $a = d, b = 12d$  și înlocuind în  $6a + b = 330$  obținem  $18d = 330$  care nu are soluție naturală.

Pentru  $x = 3, y = 4$  avem  $a = 3d, b = 4d$  și înlocuind în  $6a + b = 330$  obținem  $22d = 330$  care are soluția  $d = 15$ , de unde  $a = 45$  și  $b = 60$ .

Pentru  $x = 12, y = 1$  avem  $a = 12d, b = d$  și înlocuind în  $6a + b = 330$  obținem  $73d = 330$  care nu are soluție naturală.

În sfârșit, pentru  $x = 4, y = 3$  avem  $a = 4d, b = 3d$  și înlocuind în  $6a + b = 330$  obținem  $27d = 330$  care nu are soluție naturală.

În concluzie  $a = 45$  și  $b = 60$ .

**Problema 2:** Fie numerele naturale  $a, b, c$  astfel încât

$$\frac{a+b}{bc} = \frac{b+c}{ca} = \frac{c+a}{ab}.$$

Demonstrați că  $a = b = c$ .

*Etapa pe municipiu, București, 2002*

**Soluție:** Este evident că  $a, b, c$  sunt numere naturale nenule.

Din  $\frac{a+b}{bc} = \frac{b+c}{ca} = \frac{c+a}{ab} = p$  deducem

$$a + b = pbc \quad (1)$$

$$b + c = pca \quad (2)$$

$$c + a = pab \quad (3).$$

Scăzând (2) din (1), (3) din (2) și (3) din (1) obținem

$$a - c = pc(b - a) \quad (4)$$

$$b - a = pa(c - b) \quad (5)$$

$$b - c = pb(c - a) \quad (6).$$

Acum să presupunem că  $a, b, c$  nu sunt toate egale.

Putem avea numai două egale (alegem  $a = b \neq c$  fără a pierde din generalitatea problemei) sau toate diferite.

Dacă  $a = b$ , din (5) rezultă  $c - b = 0$ , de unde  $c = b$ , contradicție.

Dacă toate sunt diferite, fără a restrânge generalitatea, putem presupune  $a < b < c$ .

În aceste condiții  $a - c < 0$  și  $b - a > 0$  ceea ce presupune că în relația (4) membrul stâng este negativ, iar membrul drept este pozitiv; contradicție.

Cum pentru  $a = b = c$  relația din enunț este verificată rezultă că singura variantă posibilă este  $a = b = c$ .

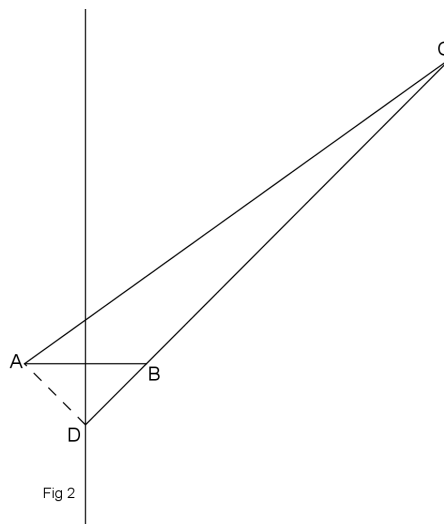
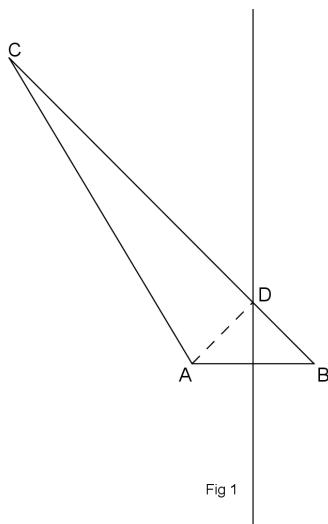
**Problema 3:** Fie triunghiul  $ABC$  cu  $AB = 3$  cm. Mediatoarea segmentului  $AB$  intersectează dreapta  $BC$  în punctul  $D$  astfel încât  $BD = \frac{1}{5} \cdot BC$  și  $AC = 4 \cdot AD$ . Știind că raportul perimetrelor triunghiurilor  $ADC$  și  $ABC$  este  $\frac{6}{7}$ , calculați lungimea segmentului  $AD$ .

*Etapa pe municipiu, București, 2000*

**Soluție:** Pentru rezolvarea problemei vom folosi următorul rezultat:

*Dacă  $M$  este un punct pe mediatoarea lui  $[AB]$ , atunci  $[MA] \equiv [MB]$ .*

Deoarece mediatoarea segmentului  $AB$  trebuie să intersecteze dreapta  $BC$  vom distinge două cazuri, așa cum se vede în imaginea de mai jos.



Dacă  $D$  aparține mediatoarei segmentului  $AB$ , atunci  $[AD] \equiv [DB]$ .

Notând  $AD = x$  rezultă  $BD = x$  și avem  $BC = 5x$  (din  $BD = \frac{1}{5} \cdot BC$ )

și  $AC = 4x$  (din  $AC = 4 \cdot AD$ ).

Pentru Fig 1 avem  $CD = 4x$  și  $P_{\triangle ADC} = 9x$ , iar  $P_{\triangle ABC} = 9x + 3$ .

Atunci, din  $\frac{P_{\triangle ADC}}{P_{\triangle ABC}} = \frac{6}{7}$  obținem  $\frac{9x}{9x + 3} = \frac{6}{7}$ , de unde  $x = 2$ .

Deci  $AD = 2$  cm.

Pentru Fig 2 avem  $CD = 6x$ ,  $AC = 4x$  și  $AD = x$ . Dar acest lucru nu este posibil deoarece nu se respectă inegalitatea triunghiului ( $AC + AD < CD$ ). Rămâne așadar,  $AD = 2$  cm.

**Problema 4:** Determinați cea mai mare fracție astfel încât împărțind

fracțiile  $\frac{24}{11}; \frac{34}{13}; \frac{48}{7}$  prin această fracție obțin cături respectiv naturale.

Viorel Chinan

**Soluție:** Fie  $\frac{a}{b}$  cea mai mare fracție ireductibilă pentru care

$$\frac{24}{11} : \frac{a}{b} = \frac{24}{11} \cdot \frac{b}{a} = x, \frac{34}{13} : \frac{a}{b} = \frac{34}{13} \cdot \frac{b}{a} = y, \frac{48}{7} : \frac{a}{b} = \frac{48}{7} \cdot \frac{b}{a} = z$$

cu  $x, y, z$  numere naturale nenule.

Cum  $a$  și  $b$  sunt prime între ele rezultă că  $a$  trebuie să dividă pe 24, 34 și 48, iar  $b$  trebuie să se dividă cu 11, 13 și 7.

Din condiția ca  $\frac{a}{b}$  să fie cea mai mare avem

$$a = (24, 34, 48) \text{ și } b = [11, 13, 7]$$

În concluzie  $a = 2$  și  $b = 1001$ , așadar fracția este  $\frac{2}{1001}$ .

**Problema 5:** Determinați toate numerele de forma  $\overline{abcd}$  cu proprietatea că

$$\overline{ab} \cdot \overline{cd} \text{ divide } \overline{abcd} \text{ (} a \neq 0, c \neq 0 \text{)}$$

Cristian Mangra

**Soluție:** Dacă  $\overline{ab} \cdot \overline{cd}$  divide  $\overline{abcd}$ , atunci există  $k$  număr natural nenul astfel încât

$$\overline{abcd} = k \cdot \overline{ab} \cdot \overline{cd},$$

de unde

$$100 \cdot \overline{ab} + \overline{cd} = k \cdot \overline{ab} \cdot \overline{cd}$$

sau

$$100 \cdot \overline{ab} = \overline{cd}(k \cdot \overline{ab} - 1).$$

Cum  $k \cdot \overline{ab} - 1$  nu divide pe  $\overline{ab}$  rezultă  $k \cdot \overline{ab} - 1$  divide 100.

Avem așadar  $k \cdot \overline{ab} - 1 \in \{10, 20, 25, 50, 100\}$ .

Singurele cazuri favorabile sunt:

$$k \cdot \overline{ab} - 1 = 25,$$

de unde

$$\overline{ab} = 13$$

și atunci

$$\overline{abcd} = 1352$$

și

$$k \cdot \overline{ab} - 1 = 50,$$

de unde

$$\overline{ab} = 17$$

și atunci

$$\overline{abcd} = 1734.$$

**Problema 6:** Fie  $p \in \mathbb{N}^*$  un număr prim,  $p \notin \{2, 5\}$ . Arătați că există un număr natural  $n \in \mathbb{N}^*$  astfel încât numărul  $p^n$ , scris în baza 10, are ultimele trei cifre 001.

Gazeta Matematică

**Soluție:** Să observăm că există o infinitate de numere naturale de forma  $p^t$  cu  $t$  număr natural nenul.

Fiind o infinitate, evident există două astfel de numere care împărțite la 1000 să dea același rest.

Fie  $k$  și  $m$ , ( $k > m$ ) astfel încât  $p^k$  și  $p^m$  dau același rest la împărțirea cu 1000.

Atunci,

$$1000 \text{ divide } p^k - p^m \text{ sau } 1000 \text{ divide } p^m (p^{k-m} - 1).$$

Cum 1000 nu divide  $p^m$ , rezultă 1000 divide  $p^{k-m} - 1$ , deci

$$p^{k-m} - 1 = 1000a$$

sau

$$p^{k-m} = 1000a + 1.$$

Evident

$$p^{k-m} = \overline{a_1 a_2 \dots a_s 001}$$

și atunci există  $n = k - m$  care să îndeplinească cerința din enunț.

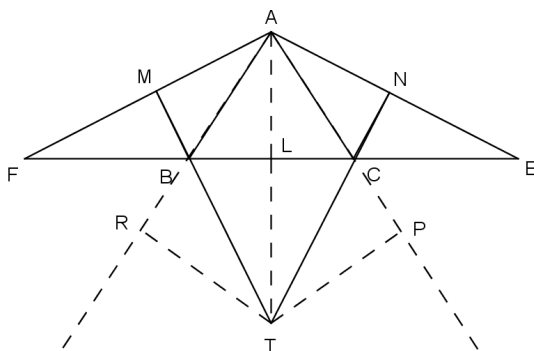
**Problema 7:** Se consideră triunghiul echilateral  $ABC$  având lungimea unei laturi de  $a$  cm. Notăm cu  $E$  simetricul lui  $B$  față de  $C$  și cu  $F$  simetricul lui  $C$  față de  $B$ .

Dacă  $AL \perp BC, BM \perp AF, CN \perp AE, L \in (BC), M \in (AF), N \in (AE)$ , atunci:

- $[AF] \equiv [AE]$
- Dreptele  $BM, CN$  și  $AL$  sunt concurente
- Știind că  $BM + MN + NC = 100$  cm, să se determine  $a$ .

Constantin Niță Cristi

**Soluție:**



a) În  $\triangle AFB$  și  $\triangle AEC$  avem  $[AB] \equiv [AC]$  (din ipoteză);  $[BF] \equiv [CE]$  (ambele sunt congruente cu  $[BC]$ );  $\widehat{ABF} \equiv \widehat{ACE}$  (fiecare are câte  $120^\circ$ ). De aici, conform cazului L.U.L. rezultă  $\triangle AFB \equiv \triangle AEC$ , de unde  $[AF] \equiv [AE]$ .

b) Vom folosi următoarele rezultate:

*Într-un triunghi isoscel înălțimea din vârf este și bisectoare.*

*Un punct aparține bisectoarei unui unghi dacă și numai dacă este egal depărtat de laturile unghiului.*

Avem  $\triangle ABF$  este isoscel ( $[AB] \equiv [BF]$ ) și  $BM$  este înălțime, așadar  $BM$  este bisectoarea unghiului  $ABF$ .

Cum  $\widehat{ABF}$  și  $\widehat{CBR}$  sunt unghiuri opuse la vârf deducem că  $BM$  este bisectoare și pentru unghiul  $CBR$ .

Analog  $CN$  este bisectoarea unghiului  $BCE$ .

Fie  $\{T\} = MB \cap NC$ .

Dacă  $T$  aparține bisectoarei unghiului  $CBR$  avem

$$\text{dist}(T, BR) = \text{dist}(T, BC).$$

Dacă  $T$  aparține bisectoarei unghiului  $BCP$  avem

$$\text{dist}(T, CP) = \text{dist}(T, CB).$$

Din cele două relații deducem

$$\text{dist}(T, BR) = \text{dist}(T, CP).$$

Cum  $BR = AR$  și  $CP = AP$  deducem

$$\text{dist}(T, AR) = \text{dist}(T, AP)$$

ceea ce arată că  $T$  aparține bisectoarei unghiului  $BAC$ , iar aceasta este chiar  $AL$ .

În concluzie, dreptele  $BM, CN, AL$  sunt concurente.

c) Pentru că  $B$  este mijlocul segmentului  $FC$  și  $M$  este mijlocul segmentului  $AF$  (vezi punctul b) deducem că  $BM$  este linie mijlocie în triunghiul  $AFC$ , deci

$$BM = \frac{AC}{2} = \frac{a}{2}.$$

Analog avem  $NC$  linie mijlocie în triunghiul  $ABE$ , așadar

$$CN = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}.$$

De asemenea,  $MN$  este linie mijlocie în triunghiul  $AFE$ , deci

$$MN = \frac{EF}{2} = \frac{3a}{2}.$$

Cu acestea avem

$$BM + MN + NC = \frac{a}{2} + \frac{3a}{2} + \frac{a}{2} = \frac{5a}{2}.$$

Deci

$$\frac{5a}{2} = 100,$$

de unde

$$a = 40.$$