Problema 2. Cum se poate scrie 2014 ca sumă de numere întregi consecutive? Găsiţi toate scrierile posibile.

Propunere a României pentru OIM în anii 1960, prelucrare

Soluţie:
Fie $n+1, n+2, \ldots n+m$, cu $n \in \mathbb{Z},\ m \in \mathbb{N}^*$ numere întregi consecutive care au suma 2014.
Atunci $(n+1)+(n+2)+\ldots+(n+m)=2014$, adică $nm+\dfrac{m(m+1)}{2}=2014$.
Obţinem ecuaţia $m(2n+m+1)=4028$.
Observând că m şi $2n+m+1$ au parităţi diferite, $m>0$ (deci trebuie ca şi $2n+m+1>0$) şi m este un divizor al lui $4028=2^2\cdot 19\cdot 53$, obţinem că $m\in\{1,4,19,53,76,212,1007,4028\}$. (Ceilalţi divizori nu convin pentru că ei conduc la $2n+m+1$ şi m de aceeaşi paritate.)

- $m=1$ implică $2n+m+1=4028$, deci $n=2013$; obţinem scrierea $2014=2014$;
- $m=4$ implică $2n+m+1=1007$, deci $n=501$;
  obţinem scrierea $2014=502+503+504+505$;
- $m=19$ implică $2n+m+1=212$, deci $n=96$;
  obţinem scrierea $2014=97+98+\ldots+115$;
- $m=53$ implică $2n+m+1=76$, deci $n=11$;
  obţinem scrierea $2014=12+13+\ldots+64$;
- $m=76$ implică $2n+m+1=53$, deci $n=-12$;
  obţinem scrierea $2014=-11-10-...-1+0+1+...+64$;
- $m=212$ implică $2n+m+1=19$, deci $n=-97$;
  obţinem scrierea $2014=-96-95-\ldots-1+0+1+\ldots+115$;
- $m=1007$ implică $2n+m+1=4$, deci $n=-502$;
  obţinem scrierea $2014=-501-500-\ldots-1+0+1+\ldots+505$;
- $m=4028$ implică $2n+m+1=1$, deci $n=-2014$;
  obţinem scrierea $2014=-2013-2012-\ldots-1+0+1+\ldots+2014$.