Clasa a VII-a

Problema 1. Numim palindrom un număr care citit de la stânga la dreapta şi citit de la dreapta la stânga rămâne neschimbat. De exemplu 5678765 este un palindrom, iar 23455234 nu este palindrom. Există vreun număr natural $n \geq 2$ astfel încât numărul $\overline{1234567891011121314...}$ să fie palindrom ?

Viitori Olimpici 2021

Soluţie și barem: Presupunem că există n astfel încât $N = \overline{1234\ldots n}$ să fie palindrom. Atunci ultima cifră a lui n este 1, deci n nu este putere a lui 10.

Fie $n = a \cdot 10^k + b$, cu $a \in \{1, 2, \ldots, 9\}$ şi $1 \leq b < 10^k$. Atunci în N apare secvenţa $S = 100\ldots01$, cu k cifre de 0.

Observăm că această secvenţă nu poate să apară decât o dată, deoarece k este numărul maxim de 0-uri consecutive, iar grupul cu k 0-uri consecutive este delimitat de două cifre 1 doar într-un singur caz............................**3p**

Dacă S este situată în întregime înainte sau după ,,mijlocul" lui N, atunci, cum ea nu se repetă, N nu poate fi palindrom..............................**2p**

Dacă ,,mijlocul" lui N se suprapune peste S, atunci, pentru ca N să poată fi palindrom, ar trebui ca ,,mijlocul" lui S să coincidă cu ,,mijlocul" lui N. În acest caz, ultima cifră înaintea lui S este 9, pe când prima cifră după S este 0, deci nici în acest caz nu convine...**2p**