Problemă. Determinaţi numărul $\overline{abcd}$ ştiind că

$$36^a + 6^a = 6^b + \overline{cddc}$$

şi $\overline{cddc}$ este cubul unui număr prim.

Luminiţa Bucureşteanu şi Mariana Caracostea

Soluţie. Folosind scrierea zecimală avem

$$\overline{cddc} = 1001c + 110d = 11(91c + 10d)$$

ceea ce arată că $11 \mid \overline{cddc}$.

Cum $\overline{cddc}$ este cubul unui număr prim rezultă

$$\overline{cddc} = 11^3 = 1331.$$

Cu aceasta, egalitatea din enunţ devine

$$36^a + 6^a = 6^b + 1331$$

pe care o mai putem scrie

$$6^{2a} + 6^a = 6^b + 1331$$

sau

$$6^a(6^a + 1) = 6^b + 1331$$

În membrul stâng avem un produs de două numere consecutive, adică un număr par.

Pentru a avea egalitate şi membrul drept trebuie să fie număr par, deci $b = 0$.

Atunci egalitatea devine

$$6^a(6^a + 1) = 1332$$

sau

$$6^a(6^a + 1) = 36 \cdot 37$$

de unde deducem că

$$6^a = 36$$

adică $a = 2$.

Numărul căutat este 2013.