Clasa a 11-a

Problema 3. Fie $(a_n)_{n\geqslant 1}$ un şir de numere reale pozitive care are limita finită şi nenulă ℓ. Calculaţi

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+a_1}+\frac{1}{n+2a_2}+\frac{1}{n+3a_3}+\cdots+\frac{1}{n+na_n}\right).$$

Radu Gologan, Bucureşti

Soluţie. *Lemă.* Vom demonstra că, dacă $a\in(0,\infty)$, atunci

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+a}+\frac{1}{n+2a}+\frac{1}{n+3a}+\cdots+\frac{1}{n+na}\right)=\frac{\ln(1+a)}{a}. \qquad \textbf{1p}$$

Într-adevăr, folosind teorema lui Lagrange rezultă

$$\frac{\ln(n+ka+a)-\ln(n+ka)}{a}<\frac{1}{n+ka}<\frac{\ln(n+ka)-\ln(n+ka-a)}{a}$$

pentru $k=1,2,\ldots,n$. Prin adunare obţinem

$$\frac{\ln\frac{n+na+a}{n+a}}{a}<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+ka}<\frac{\ln\frac{n+na}{n}}{a}$$

de unde, cu teorema cleştelui, rezultă concluzia lemei. **2p**

Arătăm acum că limita cerută este $\dfrac{1}{\ell}\ln(1+\ell)$.

Avem

$$d_n:=\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k\ell}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+ka_k}\right|\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{k|a_k-\ell|}{(n+ka_k)(n+k\ell)}\leqslant\frac{\sum_{k=1}^{n}|a_k-\ell|}{n},$$

ultima inegalitate fiind justificată de $n+ka_k>n$ şi $n+k\ell>k$ **2p**

Cu lema Stolz-Cesàro obţinem $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum_{k=1}^{n}|a_k-\ell|}{n}=0$, deci $\lim\limits_{n\to\infty}d_n=0$ şi, folosind lema, rezolvarea se încheie **2p**