

Problemă. Aflați restul împărțirii numărului $A = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2011}$ la 30.

Ion Cicu

Soluție. Calculăm

$$3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 = 120.$$

Deoarece

$$120 = 30 \cdot 4$$

înseamnă că, dacă grupăm termenii câte patru, îl vom putea scoate factor comun pe 30.

Suma dată conține 2011 termeni. Dacă îi grupăm câte patru ne rămân 3 termeni a căror sumă nu conține factorul 30.

Îi vom păstra pe primii trei.

$$\begin{aligned} \text{Avem } A &= 3 + 3^2 + 3^3 + 3^3(3 + 3^2 + 3^3 + 3^4) + \dots + \\ &3^{2007}(3 + 3^2 + 3^3 + 3^4) = 39 + 3^3 \cdot 120 + \dots + 3^{2007} \cdot 120 = \\ &9 + 30 + 30(3^3 \cdot 4 + 3^7 \cdot 4 + \dots + 3^{2007} \cdot 4) = \\ &9 + 30(1 + 3^3 \cdot 4 + 3^7 \cdot 4 + \dots + 3^{2007} \cdot 4). \end{aligned}$$

Din ultima relație deducem că restul împărțirii lui A la 30 este 9.

Exercițiu suplimentar: Folosind eventual problema de mai sus, aflați restul împărțirii numărului 3^{2012} la 30.