Etapa 2, Problema 4

Fie $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \,|a, b \in \mathbb{Z}\}$.

a) Dacă ABC este un triunghi în plan astfel încât afixele vârfurilor sale aparţin mulţimii $\mathbb{Z}[i]$, demonstraţi că $2 \cdot aria\,[ABC] \in \mathbb{N}^*$.

b) Există în plan vreun hexagon regulat ale cărui vârfuri să aibă afixele în $\mathbb{Z}[i]$?

***

Soluţie.

a) Dacă triunghiul ABC are afixele vârfurilor numere din $\mathbb{Z}[i]$, putem construi un dreptunghi $AMNP$ ale cărui vârfuri are afixele din $\mathbb{Z}[i]$ astfel încât $B \in [MN]$ şi $C \in [NP]$. Atunci $aria\,[ABC]$ va fi egală cu

$$aria\,[AMNP] - (aria\,[AMB] + aria\,[BNC] + aria\,[CPA]) .$$

Cum lungimile laturilor dreptunghiului şi catetele triunghiurilor dreptunghice AMN, BNC, CPA se exprimă prin numere naturale, rezultă că $2 \cdot aria\,[ABC] \in \mathbb{N}^*$.

b) Presupunând că există în plan un hexagon regulat $A_1A_2...A_6$ ale cărui vârfuri au afixele din $\mathbb{Z}[i]$, aria acestuia se poate exprima prin

$$aria\,[A_1A_2...A_6] = 2 \cdot aria\,[A_1A_2A_3] + 2 \cdot aria\,[A_1A_3A_4] ,$$

care este număr natural.

Pe de altă parte,

$$aria\,[A_1A_2...A_6] = \frac{A_1A_2^2 \cdot \sqrt{3}}{4}.$$

Cum $AB^2 \in \mathbb{N}^*$, $aria\,[A_1A_2...A_6]$ este număr iraţional, contradicţie.

În concluzie, nu există hexagoane regulate având vârfurile cu afixele în $\mathbb{Z}[i]$.