Problema 4. Doi copii, Alina şi Bogdan, joacă următorul joc. Pe tablă sunt scrise numerele de la 1 la n. Cei doi copii, începând cu Alina, şterg, alternativ, câte un număr de pe tablă, până când pe tablă rămân două numere. Dacă suma numerelor rămase pe tablă este divizibilă cu 3, câştigă Alina; în caz contrar, câştigă Bogdan. Cine câştigă la joc corect dacă:
a) $n = 2014$;
b) $n = 2013$.

* * *

Soluţie:
a) Bogdan are strategie câştigătoare. De exemplu, el poate grupa numerele de pe tablă în perechi cu suma 2015: $(1, 2014)$, $(2, 2013)$, $\ldots$, $(1007, 1008)$. Dacă Alina şterge unul din numerele ce compun o anumită pereche, Bogdan îl şterge pe celălalt. Atunci când îi vine rândul, Alina este obligată să ,,înceapă" de fiecare dată o pereche nouă. După ce copii au şters câte 1006 numere, pe tablă a rămas o pereche ,,completă" $(k, 2015 - k)$, deci, procedând astfel, Bogdan a făcut ca suma celor două numere rămase pe tablă să fie 2015, care nu este divizibil cu 3, lucru care i-a asigurat victoria.
b) De această dată Alina are strategie câştigătoare. De exemplu, ea poate începe prin a şterge numărul 2013 de pe tablă. Alina poate acum grupa numerele rămase pe tablă în perechi cu suma 2013: $(1, 2012), (2, 2011)$, $\ldots$, $(1006, 1007)$. De astă dată Bogdan va fi cel care începe fiecare pereche şi Alina va şterge mereu celălalt număr din pereche. Ultimele două numere vor forma o pereche completă de forma $(k,\ 2013 - k)$, deci suma lor va fi 2013, multiplu de 3, ceea ce îi va asigura Alinei victoria.