Se dau 25 de numere naturale, distincte două câte două, mai mici decât 1000, care au proprietatea că produsul oricăror două dintre ele este pătrat perfect. Arătaţi că fiecare din cele 25 de numere este pătrat perfect.

Concurs KöMaL, Ungaria, 2004

Soluţie.
Presupunând că nu toate numerele ar fi pătrate perfecte, printre ele s-ar găsi unul care, în descompunerea sa în factori primi, conţine (cel puţin) un factor prim la putere impară. Fie a un asemenea număr şi $p_1, p_2, \ldots, p_n$ factorii primi care în descompunerea lui a apar la o putere impară. Deoarece atunci când a este înmulţit cu celelate 24 de numere se obţine mereu un pătrat perfect, rezultă că $p_1, p_2, \ldots, p_n$ apar la putere impară în descompunerea în factori primi a tuturor celorlalte 24 de numere (exceptându-l pe 0 dacă acesta este unul dintre numere). Notând cu d produsul $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$, toate numerele trebuie să fie de forma $d \cdot x^2$ cu câte un alt x. Rezultă că cele 25 de numere sunt cel puţin 0, d, $4d, \ldots, 24^2 d$, dar, cum $d \geq 2$, rezultă că cel mai mare dintre numere este cel puţin $2 \cdot 24^2 = 1152 > 1000$, contradicţie.

Observaţie. Afirmaţia din problemă are loc şi pentru 24 de numere deoarece, presupunând contrariul, cel mai mare dintre ele ar fi cel puţin $2 \cdot 23^2 = 1058 > 1000$, contradicţie.