Comentarii la a 30-a Balcaniadă de Matematică
BMO 2013, Agros – Cipru

ABSTRACT. Comments on the problems of the 30th BMO (the Balkan Mathematical Olympiad), Agros – Cyprus, June 28 – July 3, 2013.

Data: 3 iulie 2013.
Autor: Dan Schwarz, Bucureşti.

1. Introducere şi Conţinut

Această prezentare, însoţită de comentarii asupra celei de a 30-a BMO (Balcaniada de Matematică), Agros – Cipru, 28 iunie – 3 iulie 2013, este, după un acum vechi şi cunoscut tabiet, opinia personală a autorului.[1]

Voi indica prin culoarea **roşie** eventualele erori, sau notaţiile abuzive din enunţurile originale, şi prin culoarea **verde** varianta de preferat (sau care lipsea din enunţ sau soluţie). Voi folosi în mod predilect şi culoarea **albastră** pentru comentariile personale.

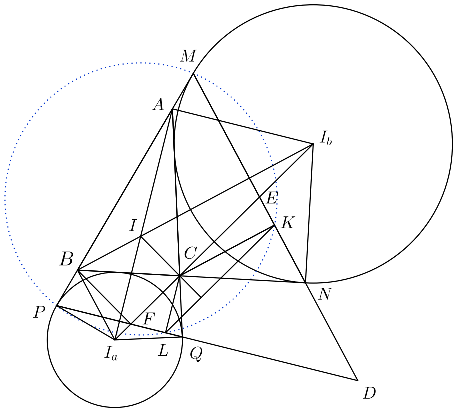
Subiectul (1)**.** *Într-un triunghi ABC, cercul exînscris ω_a, corespunzător vârfului A, este tangent dreptei AB în P şi dreptei AC în Q, iar cercul exînscris ω_b, corespunzător vârfului B, este tangent dreptei BA în M şi dreptei BC în N. Fie K proiecţia lui C pe MN, şi fie L proiecţia lui C pe PQ. Să se arate că patrulaterul $MKLP$ este inscriptibil.*

BULGARIA

Soluţie. (Ioan Laurenţiu Ploscaru) Este o chestiune de construcţii auxiliare naturale, şi inscriptibilitate. Fie $D = PQ \cap MN$; din motive triviale de unghiuri, este suficient să arătăm că $AB \perp CD$. Fie I, I_a şi I_b centrele cercurilor înscris, respectiv ω_a şi ω_b, şi fie E şi F punctele de intersecţie ale dreptei I_aI_b cu MN, respectiv PQ. Deoarece $\angle BPF = \angle BI_aF = \pi/2 - \angle A/2$, patrulaterul BFI_aP este inscriptibil, deci $BF \perp I_aI_b$. Prin urmare punctele M, N, F se află pe cercul de diametru BI_b. De asemenea, avem $\angle ENC = \pi/2 - \angle B/2 = \angle I_aBP = \angle I_aFP = \angle DFC$, deci patrulaterul $CFDN$ este inscriptibil. Finalmente $\angle NDC = \angle NFC = \angle NMI_b$, de unde $CD \parallel MI_b$, ceea ce trebuia demonstrat. □

Soluţie Alternativă. (Daniel Hu) Demonstrăm că mediatoarele segmentelor KM şi PL se intersectează pe mediatoarea lui AB. Mediatoarea lui PQ va intersecta AB în A, şi cum $CQ = s - b$, mediatoarea lui PL intersectează AB la $(s - b)/2$ între A şi B, adică la $(s - a)/2$ de centrul lui AB. Acelaşi lucru pentru cealaltă mediatoare; pentru a arăta că ele se intersectează pe mediatoarea lui AB avem nevoie ca $(s-a)\tan(A/2) = (s-b)\tan(B/2)$, dar acest lucru este adevărat, căci ambele sunt egale cu raza cercului înscris. □

[1] Subiectele şi lista de medalii la `http://www.bmo2013.eu/`; din păcate soluţiile oficiale şi rezultatele complete lipsesc de pe site. Pentru alte detalii, daţi-mi un ☎



Figura, curtoazie Andrei Eckstein.

Remarcă. O problemă simplă, dar nu antipatică; un bun deschizător de concurs. Mulţi au răsuflat poate uşuraţi (cei ca mine, nu foarte amatori de geometrie) că au scăpat cu o problemă uşoară de geometrie. Alţii au regretat că punctul lor *forte* (geometria) nu a fost testat cu o problemă mai dificilă, unde să obţină un avantaj faţă de ceilalţi competitori.

Subiectul (2)**.** *Să se determine toate numerele naturale nenule x, y şi z astfel încât*

$$x^5 + 4^y = 2013^z.$$

SERBIA

Soluţie. (AoPS) Modulo 11 avem $4^y \equiv 4, 5, 9, 3, 1 \pmod{11}$; pe de altă parte $x^5 \equiv 0, \pm 1 \pmod{11}$, şi deoarece $11 \mid 2013$ rezultă $4^y \equiv 1 \pmod{11}$, ceea ce implică $5 \mid y$. Fie atunci $y = 5a$. Ne aflăm într-o bună poziţie, căci acum putem factoriza $x^5 + 4^y$ ca sumă de puteri a 5-a.

Fie un prim $p \mid x + 4^a \mid x^5 + (4^a)^5 = x^5 + 4^y = 2013^z$. Evident, trebuie să avem $p \in \{3, 11, 61\}$, căci $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$.

Dar atunci, din LTE (Lifting The Exponent lemma),[2] rezultă formula $\upsilon_p(x^5 + (4^a)^5) = \upsilon_p(x + 4^a) + \upsilon_p(5) = \upsilon_p(x + 4^a)$. Aceasta înseamnă că puterile 3^z, 11^z şi 61^z sunt repartizate ca un tot între $x + 4^a$ şi $\dfrac{x^5 + (4^a)^5}{x + 4^a}$, care au fost dovedite relativ prime. Următoarea dublă inegalitate

$$(x + 4^a)^5 > x^5 + 4^{5a} \geq \frac{(x + 4^a)^5}{2^4}$$

este evident adevărată (Hölder, sau altele). Avem atunci doar două cazuri.

• $x + 4^a \leq 3^z$. Atunci $2013^z = x^5 + 4^{5a} < (x + 4^a)^5 \leq (3^z)^5 = 243^z$, absurd;

• $x + 4^a \geq 11^z$. Atunci $2013^z = x^5 + 4^{5a} \geq \dfrac{(x + 4^a)^5}{2^4} \geq \dfrac{(11^z)^5}{16} > 2013^z$, iarăşi absurd.

Prin urmare nu există soluţii în numere naturale nenule. □

[2] Nu e chiar nevoie de această lemă. Dacă $p \mid A + B$ şi $p \mid A^4 - A^3B + A^2B^2 - AB^3 + B^4$, atunci $B \equiv -A \pmod{p}$ şi deci $0 \equiv A^4 - A^3B + A^2B^2 - AB^3 + B^4 \equiv 5A^4 \pmod{p}$, aşadar $p \mid 5$ sau $p \mid A$. Dar la noi $p \neq 5$, iar $p \mid A$ duce şi la $p \mid B$; cum am notat $A = x^5$ şi $B = 4^y$, aceasta forţează $p = 2$, imposibil.

Remarcă. Problema este bazată pe valorile particulare pe care puterile lui 4 le iau modulo 11, ceea ce forţează $4^y \equiv -x^5 \pmod{11}$ doar când $5 \mid y$. Apoi nişte simple inegalităţi (iarăşi, o *modă* de a trata probleme de teoria numerelor cu metode mai mult algebrice) duc la imposibilitatea obţinerii de soluţii în numere naturale nenule.

Nu sunt un mare amator de asemenea speculaţii, relativ sterile. Cel puţin aici numărul prim "special" care conduce la soluţie nu era atât de greu de "ghicit"; este natural să ne uităm la divizorii lui $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$, dar 3 este prea mic, şi nu dă informaţii suficiente, iar 61 este prea mare pentru a fi confortabil la lucru, aşa încât 11 era chiar candidatul bun (ca în povestea cu Goldilocks şi familia celor trei urşi, Papa bear, Mama bear şi Baby bear).

Subiectul (3)**.** *Fie S mulţimea numerelor reale strict pozitive. Găsiţi toate funcţiile $f\colon S^3 \to S$ care satisfac condiţiile*

(a) $xf(x,y,z) = zf(z,y,x)$,
(b) $f(x,ky,k^2z) = kf(x,y,z)$,
(c) $f(1,k,k+1) = k+1$.

pentru orice numere reale strict pozitive x, y, z şi k.

Marea Britanie – J. E. Smith

Soluţie. (Teodor Andrei Andronache) Avem, din *(b)* şi *(c)*,

$$f(1,kt,k^2(t+1)) = kf(1,t,t+1) = k(t+1).$$

Dar pentru orice numere reale strict pozitive u, v putem alege k, t astfel ca $u = kt$ şi $v = k^2(t+1)$, căci sistemul se rezolvă prin $k = u/t$, $v = u^2(t+1)/t^2$, deci $vt^2 - u^2t - u^2 = 0$, de unde $t = \dfrac{u}{2v}\left(u + \sqrt{u^2+4v}\right)$ şi $k = u/t$. Atunci $f(1,u,v) = k(t+1) = \dfrac{v}{k} = \dfrac{vt}{kt} = \dfrac{v}{u}t = \dfrac{u+\sqrt{u^2+4v}}{2}$, pentru toţi $u, v \in S$. Prin urmare, din *(a)* şi relaţia de mai sus, $f(v,u,1) = \dfrac{u+\sqrt{u^2+4v}}{2v}$, de unde, din *(b)* şi relaţia de mai sus,

$$f(x,y,z) = f\left(x, \sqrt{z}\cdot\frac{y}{\sqrt{z}}, \sqrt{z}^2\cdot 1\right) = \sqrt{z}f\left(x, \frac{y}{\sqrt{z}}, 1\right) = \frac{y+\sqrt{y^2+4xz}}{2x},$$

pentru oricare $x, y, z \in S$. Mai rămâne de verificat (?) că cele trei condiţii sunt îndeplinite, ceea ce este trivial. □

Remarcă. Să observăm că funcţia este soluţia (pozitivă a) ecuaţiei pătratice

$$xf(x,y,z)^2 - yf(x,y,z) - z = 0.$$

Este evident că autorul a plecat de la o anume identitate, căci este greu altfel de imaginat cum de a ajuns la aceste trei condiţii destul de ciudate, şi cu alură complicată. Rămâne să ne întrebăm dacă observaţia de mai sus a fost punctul de plecare? Este un exerciţiu interesant, acela de a încerca a pătrunde în mintea propunătorului. În *hindsight*, alte metode de a soluţiona pot eventual fi găsite.[3]

[3] *À propos*, urăsc aceste notaţii *ad-hoc*; nu se putea scrie, în mod consacrat, $S = \mathbb{R}_+^*$? În altă ordine de idei, condiţia *(b)* apare în enunţurile oficiale astfel $f(x,yk,k^2z) = kf(x,y,z)$; simţul meu de simetrie a fost atât de ofensat, încât am schimbat-o, fără alte menajamente.

Subiectul (4)**.** *La un concurs de matematică, unii elevi participanţi sunt prieteni; prietenia este întotdeauna mutuală, adică dacă A este prieten cu B, atunci şi B este prieten cu A. Spunem că $n \geq 3$ elevi diferiţi $A_1, A_2, \ldots, A_n$ formează un* ***ciclu slab-prietenos*** *dacă A_i nu este prieten cu A_{i+1}, pentru $1 \leq i \leq n$ ($A_{n+1} = A_1$), şi nu mai există în acest ciclu alte perechi de neprieteni.*

Presupunem că este satisfăcută proprietatea

> *"pentru orice elev C, orice ciclu slab-prietenos $\mathcal{S}$ care nu-l conţine pe C are cel mult un elev care nu este prieten cu C"*

Să se arate că toţi elevii pot fi repartizaţi în trei camere, astfel încât oricare doi elevi din aceeaşi cameră sunt prieteni.

SERBIA – Marko Radovanović

Un enunţ echivalent, folosind terminologia teoriei grafurilor, este

> Fie $G = (V, E)$ graful simplu finit având drept vârfuri V elevii, şi drept muchii E relaţiile de neprietenie (este mai convenabil astfel). Vom zice că $n \geq 3$ vârfuri $v_1, v_2, \ldots, v_n$ formează un *ciclu indus fără coarde* dacă v_i este adiacent cu v_{i+1} pentru $1 \leq i \leq n$ (unde $v_{n+1} = v_1$), şi nu mai există alte vârfuri adiacente printre aceste n vârfuri.
> Graful G satisface proprietatea că pentru oricare vârf v şi pentru oricare ciclu indus fără coarde γ care nu-l conţine pe v, cel mult un vârf w al ciclului γ este adiacent cu v.
> Trebuie demonstrat că graful G este 3-colorabil (adică V poate fi partiţionat în 3 submulţimi independente de vârfuri, sau altfel, că graful G este tripartit).

Va fi interesant de comparat gradul ei de dificultate cu cel al Problemei 3, IMO 2007, Vietnam, notorie pentru faptul că doar 2 din 520 de participanţi au primit nota maximă 7/7 (şi doar alţi 5 au primit o notă de cel puţin 4/7 – printre care Livia Ilie); la prima vedere, enunţurile sunt extrem de asemănătoare, dar acest lucru este înşelător ... Pentru conformitate, iat-o reprodusă mai jos.

> La un concurs de matematică, unii dintre elevii participanţi sunt prieteni; prietenia este întotdeauna mutuală. Un grup de concurenţi se numeşte *clică* dacă oricare doi dintre ei sunt prieteni (în particular, orice grup de mai puţin de doi concurenţi este o clică). Numărul de membri dintr-o clică se numeşte *talia* ei.
> Ştiind că în acest concurs cea mai mare talie a unei clici este număr par, demonstraţi că toţi elevii pot fi repartizaţi în două camere, astfel încât talia maximă a clicilor dintr-una din camere să fie egală cu talia maximă a clicilor din cealaltă cameră.

Dar problema de faţă este relativ (mult) mai abordabilă decât problema din Vietnam, după cum se va vedea.

Soluţie. Soluţia este scrisă în terminologia echivalentă de teoria grafurilor. Vom numi *elice* un graf (γ, Ω) format dintr-un ciclu fără coarde γ, numit *contur*, plus un *centru* Ω nesituat pe γ, dar adiacent cu cel puţin două vârfuri de pe γ. Vom demonstra că un graf G, care nu conţine niciun subgraf indus care să fie elice, conţine cel puţin un vârf de grad cel mult 2. Acum rezultatul se obţine cu uşurinţă, prin simplă inducţie. Fie $v \in V$, $\deg v \leq 2$; atunci $G - v$ are şi el proprietatea că nu conţine niciun subgraf indus care să fie elice, deci (prin ipoteza de inducţie) poate fi colorat cu (cel mult) 3 culori, dar atunci v poate fi şi el colorat, căci cel mult două culori sunt interzise.

Să presupunem prin absurd că $\deg v \geq 3$ pentru toate vârfurile $v \in V$. Fie $P = xv_1 \ldots v_k y$ un **cel mai lung** drum în G, de capete x şi y, şi care să nu aibă coarde (o aplicare a **principiului combinatoric al elementului extremal**).[4] Deoarece $\deg x \geq 3$, vârful x are cel puţin doi vecini u şi u' care nu se află în P. Din maximalitatea lui P rezultă că u (respectiv u') are (măcar) un vecin în $P - x$, căci altfel $P + u$ (respectiv $P + u'$) ar fi un drum fără coarde mai lung decât P. Fie v_i (respectiv $v_{i'}$) cel mai apropiat de x vecin al lui u (respectiv u') în $P - x$ (este chiar posibil să avem $i = i'$); putem presupune că $1 \leq i' \leq i \leq k$. Dar atunci $(\gamma = uxv_1 \ldots v_i u, \Omega = u')$ este o elice, absurd. □

Remarcă. Nici pe departe această condiţie, suficientă pentru ca graful să fie tripartit, nu este şi necesară. În general, condiţii de echivalenţă ("dacă şi numai dacă") sunt mai uşor de tratat, căci conceptele sunt mai strâns legate între ele. Aşa, sunt mai multe drumuri care se pot deschide ...

Ca de obicei, sunt în total dezacord cu a "ascunde" rezultatul principal într-un corolar trivial al său. În cazul nostru, ingredientul principal este prezenţa unui vârf de grad cel mult 2; acum 3-colorabilitatea rezultă în mod trivial prin simplă inducţie. Ar fi fost mai *fair* să se ceară exact acest lucru – în limbajul problemei – anume că există un elev care este prieten cu toată lumea, cu excepţia a cel mult alţi doi elevi.

Şi acuma vine "poanta" cea mai tare, relativ la această problemă, care este de fapt **Teorema 2.11**, paginile 12-13, cu provenienţa dintr-un articol scris în colaborare de propunătorul problemei.[5] Deşi soluţia, după cum se vede mai sus, este clasică, şi rezonabil de scurtă, nu este de mirare că în toiul luptei, şi cu alte trei probleme de rezolvat într-un timp limitat, nu a fost dovedită de către niciunul dintre concurenţi. Oare este bine? nu e bine? oare Juriul era în cunoştinţă de cauză, sau nu? La jBMO 2013, comentată de mine recent, Problema 4 a fost şi acolo cu cântec – o particularizare, de data aceea, a unei mult mai celebre teoreme. Se pare că s-a ajuns să se recurgă în mod aproape regulat la refolosirea unor rezultate mai mult sau mai puţin clasice. Să vedem ce ne rezervă în această privinţă viitoarea Olimpiadă Internaţională !?!

[4] Idei foarte asemănătoare sunt folosite în demonstrarea teoremelor DIRAC şi ÖRE, de existenţă a unui circuit Hamiltonian; vezi [REINHARD DIESTEL – *Graph Theory*].

[5] `http://www.liafa.univ-paris-diderot.fr/~aboulker/propellers.pdf`
De unde ştiu toate acestea? Ca vulpe bătrână ce mă aflu, am bănuit că este parte dintr-un rezultat ceva mai amplu, şi am depistat pe Internet sursa indubitabilă a acestei probleme. *There is no new thing upon the earth* – îl cita BORGES într-un motto al său pe FRANCIS BACON, la rândul său citând din regele SOLOMON. BACON continuă cu spusele lui PLATO – *That all knowledge was but remembrance* – interpretând astfel pe SOLOMON ca spunând – *That all novelty is but oblivion.*

2. ÎNCHEIERE

De data aceasta, site-ul oficial cipriot a fost relativ rapid în a disemina, măcar şi parţial, informaţiile concursului. Enunţurile au apărut (în toate limbile ţărilor participante) puţin după ora 19:00; dar soluţiile oficiale şi baremele de coordonare lipsesc.[6] În plus, componenţa echipelor participante nu este menţionată nicăieri pe site; îmi aduce parcă aminte de acum doi ani, când rezultatele jBMO au fost afişate cu codul de concurs al concurentului, în loc de nume. Din cauza dezertării Albaniei de la datoria de a găzdui competiţia după agenda stabilită, pentru prima dată costurile şederii au fost acoperite de echipele participante. Ministerul Educaţiei a trebuit deci să deburseze, în afară de costurile obişnuite pentru voiaj, circa € 1600, plus alte taxe. Nimic nu este însă prea scump pentru gloria patriei! Este un eveniment nefericit că această ediţie a 30-a, aproape jubiliară, a trecut prin păţaniile prin care a fost nevoită să treacă ☻ ☹

Eram pregătit cu critici abundente asupra conţinutului acestui concurs, înainte chiar să-l fi văzut, dar m-am înşelat! Un concurs curăţel, alcătuit dintr-o geometrie simplă, o ecuaţie diofantică relativ insipidă (dar la modă), o ecuaţie funcţională neobişnuită, şi un climax combinatoric dificil (achtung! însă la observaţiile mele detaliate de mai înainte). Nu chiar cea mai rea compoziţie văzută în ultimii ani.

Au participat 10 dintre cele 11 ţări membre (Turcia nu participă din principiu la activităţi în Cipru), precum şi alte (de data aceasta, doar) 6 ţări invitate. Rezultatele echipei noastre la BMO 2013, Cipru, sunt, cu felicitările de rigoare!

Cătălin GHERGHE		Bucureşti		Leader
Marius MÂINEA		Găeşti		Deputy
Nume		**Şcoala**	**Puncte**	**Medalie**
Ömer CERRAHOĞLU	XI	C.N. Gh. Şincai, Baia Mare	34	Aur
Ştefan SPĂTARU	X	ICHB, Bucureşti	28	Argint
Simona DIACONU	X	ICHB, Bucureşti	34	Aur
Marius BOCANU	X	ICHB, Bucureşti	**36**	**Aur**
Paul Gabriel MUSCĂ	XI	ICHB, Bucureşti	29	Argint
Viorel Andrei BUD	XI	ICHB, Bucureşti	34	Aur
Echipa României			**195/240**	**1/10 + (6)**

[6] Nici măcar comunitatea de useri de pe AoPS (`www.mathlinks.ro`), nu a reuşit să fie mai rapidă. Rezultatele finale au apărut (cu lipsuri) pe 2 iulie, spre ora 13:00.

Punctajul detaliat pe probleme este

Nume	P1	P2	P3	P4	Total	Medalie
Ömer CERRAHOĞLU	10	10	10	4	34	Aur
Ştefan SPĂTARU	7	10	10	1	28	Argint
Simona DIACONU	10	10	10	4	34	Aur
Marius BOCANU	10	10	10	6	**36**	**Aur**
Paul Gabriel MUSCĂ	10	7	10	2	29	Argint
Viorel Andrei BUD	10	10	10	4	34	Aur
Echipa României	**57**	**57**	**60**	**21**	**195/240**	**1/10 + (6)**

Ca şi în cazul jBMO, odată cu trecerea anilor, gradul de dificultate al acestei competiţii scade. Problemele propuse de România devin mai rare, dacă nu către dispariţie, Lista Scurtă de probleme este sărăcuţă, etc.

Am face mai bine să ne îndreptăm privirile către Occident, şi să ieşim din balcanismul călduţ în care ne complacem; am certitudinea că o cerere de adeziune la MEMO (Middle European Mathematical Olympiad) ar fi favorabil tratată, şi am avea ocazia să ne încrucişăm lăncile mai degrabă cu Austria, Cehia, Polonia, Ungaria şi altele, decât cu Muntenegru, Macedonia, Cipru şi Albania.

Câteva comentarii finale. Cinci dintre participanţii din România sunt de la ICHB (Liceul Internaţional de Informatică din Bucureşti), unde mă simt onorat să îi întâlnesc (aproape) săptămânal, cu ocazia prelegerilor mele de combinatorică (şi nu numai); dar nici Ömer nu-mi este chiar străin! (sic)

Marius Bocanu a obţinut cel mai ridicat scor din concurs – la mai mare! S-au acordat 10 medalii de Aur ($36-31$ puncte, 11%), 29 medalii de Argint ($30-20$ puncte, 30%) şi 28 medalii de Bronz ($19-8$ puncte, 29%), relativ la un total de $60+(36)=96$ participanţi, din $10+(6)=16$ ţări.

România a terminat detaşat pe primul loc în clasamentul (neoficial) pe naţiuni,[7] la uriaşă distanţă de Bulgaria, urmată de aproape de (Kazahstan) şi (Italia), apoi într-o batistă (UK) şi Serbia. De altfel, în afară de aceste ţări, celelalte au obţinut rezultate relativ mediocre, sau slabe şi foarte slabe.[8]

Recomand şi `http://www.bmoc.maths.org/home/balkan.shtml`, unde un raport detaliat al şefului delegaţiei UK apare (ce idee excelentă! către popularizarea concursului şi a rezultatelor obţinute de echipa naţională). Găsiţi un istoric din 2005; de cele mai multe ori – mai ales dacă raportorul este Geoff Smith – materialul este un model de bună sintaxă şi umor (cu uneori şi tonuri ironice sau sarcastice); în general, o lectură de calitate (iar, anecdotic, numele acestui autor este menţionat în multe dintre rapoarte).

[7]Anunţul de pe `http://ssmr.ro/comunicate_presa/BMO-2013` păcătuieşte din mai multe aspecte. Data de 25 iunie este greşită, diacriticele lipsesc, o literă în plus (întoarece (rimează cu şoarece)) şi o cacofonie (Matematica cu 4 medalii); clasele unora dintre copii sunt greşite (Bud şi Muscă sunt clasa a XI-a), iar ideea nefericită cu (originar din ...) nici măcar nu este dusă până la capăt, căci Simona este originară din Tecuci, Andrei din Negreşti-Oaş, Marius din Piteşti, Ştefan din Alexandria; Ömer este născut la Istanbul, şeful SSMR la Bran, iar noi toţi provenim de undeva, de mult, din Africa ...

[8]Reamintesc, subiectele şi listele cu medaliile obţinute pot fi consultate acum la `http://www.bmo2013.eu/`; soluţiile oficiale şi rezultatele complete încă lipsesc.