SOLUȚIE

Problema 2

Notam cu A_1, B_1 și C_1 mijloacele laturilor triunghiului ascuțitunghic ABC. Demonstrați că $HA_1 + HB_1 + HC_1 \leq r + R + OH$, notațiile fiind cele uzuale.

Mihai Opincariu

Soluție.

Alegem un reper cu originea în O. Fie x, y și z afixele vârfurilor A, B respectiv C ale triunghiului . Atunci H va avea afixul $x+y+z$ (Sylvester) .

Cum A_1 este mijlocul lui $BC \Rightarrow A_1\left(\frac{y+z}{2}\right)$. Atunci $2HA_1 = 2\left|(x+y+z)-\frac{y+z}{2}\right|$, deci $2HA_1 = |2x+y+z|$ și analog, $2HB_1 = |x+2y+z|$, $2HC_1 = |x+y+2z|$ și

$HA = |y+z|$, $HB = |x+z|$, $HC = |x+y|$, $HO = |x+y+z|$. $\qquad (1)$

Scriind inegalitatea lui Hlawka: $|\alpha+\beta|+|\beta+\gamma|+|\gamma+\alpha| \leq |\alpha+\beta+\gamma|+|\alpha|+|\beta|+|\gamma|$ pentru $\alpha = y+z$, $\beta = x+z$ și $\gamma = x+y$ obținem:

$$|2x+y+z|+|x+2y+z|+|x+y+2z| \leq 2|x+y+z|+|x+y|+|y+z|+|x+z| \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$$2\left(HA_1+HB_1+HC_1\right) \leq 2OH+AH+BH+CH . \qquad (2)$$

Dar $AH+BH+CH = 2R(\cos A+\cos B+\cos C) = 2R(1+\frac{r}{R}) = 2(R+r)$ $\qquad (3)$

Din (2) și (3) rezultă inegalitatea din concluzia problemei.