

Clasa a IX-a

Problema 1. Fie $ABCD$ un patrulater convex cu lungimile laturilor $AB = a$, $BC = CD = DA = b$. Să se arate că $A + B \leq 180^\circ$ dacă și numai dacă $a \geq b$.

Problema 2. Fie x un număr real. Arătați că șirul $(\{nx\})_{n \geq 1}$ este monoton dacă și numai dacă $x \in \mathbb{Z}$.

(Prin $\{a\}$ s-a notat partea fracționară a numărului real a).

Problema 3. Fie $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ o funcție cu proprietatea că

$$f(x) + f(y) \geq 2f(x + y), \forall x, y \in (0, \infty).$$

a) Demonstrați că $\forall x, y, z \in (0, \infty)$ are loc inegalitatea

$$f(x) + f(y) + f(z) \geq 3f(x + y + z).$$

b) Demonstrați că $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$ și $\forall x_1, x_2, \dots, x_n \in (0, \infty)$ are loc inegalitatea

$$f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) \geq n \cdot f(x_1 + x_2 + \dots + x_n).$$