# Comentarii la a 54-a Olimpiadă Internaţională de Matematică OIM 2013, Santa Marta – Columbia

ABSTRACT. Comments on the problems of the $54^{\text{th}}$ IMO (International Mathematical Olympiad), Santa Marta – Colombia, July 18 – 28, 2013.

Data: 30 iulie 2013.
Autor: Dan Schwarz, Bucureşti. (*Danton sur lie*)

## 1. INTRODUCERE

Această prezentare, însoţită de comentarii asupra celei de a 54-a OIM (Olimpiada Internaţională de Matematică), din Santa Marta – Columbia, 18 – 28 iulie 2013, este, după formula ştiută, opinia personală a autorului.[1]

Voi indica prin culoarea **roşie** eventualele erori, sau notaţiile abuzive din enunţurile originale, şi prin culoarea **verde** varianta de preferat (sau care lipsea din enunţ sau soluţie). Voi folosi în mod predilect şi culoarea **albastră** pentru comentariile personale.

O particularitate a OIM este numărul mare de contribuţii (idei, soluţii) pe care le atrage pe AoPS; decât să încerc să compilez unele dintre ele, mai bine ofer adresa de unde pot fi consultate

`http://www.artofproblemsolving.com/Forum/resources.php?c=1&cid=16&year=2013`.

Voi preciza doar în anume cazuri punctele de interes, care altfel s-ar pierde în oceanul de informaţii, sau voi face unele comentarii personale.

De asemenea, voi prezenta atât enunţurile oficiale în limba engleză, cât şi traducerea lor în limba română (din motive uşor de înţeles ... se va vedea).

## 2. OIM 2013, ZIUA 1 (23 IULIE 2013 – 3 PROBLEME/4 1/2 ORE)

**Subject** (1)**.** *Prove that for any pair of positive integers $k$ and $n$, there exist $k$ positive integers $m_1, m_2, \ldots, m_k$ (not necessarily different) such that*

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right)\left(1 + \frac{1}{m_2}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{m_k}\right).$$

JAPAN – N2

**Subiectul** (1)**.** *Demonstraţi că pentru orice numere naturale nenule $k$ şi $n$ există $k$ numere naturale nenule $m_1, m_2, \ldots, m_k$ (nu neapărat diferite) astfel încât*

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right)\left(1 + \frac{1}{m_2}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{m_k}\right).$$

JAPONIA – N2

[1] Subiectele şi rezultatele complete la
`http://www.imo-official.org/year_info.aspx?year=2013`.
Site oficial `http://www.uan.edu.co/imo2013/en/`.

*Soluţie.* Pentru $k = 1$, expresia este deja exprimată în forma cerută, căci $1 + \frac{2^1 - 1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$. Tocmai faptul că numărul de factori din membrul drept este exact exponentul lui 2 din membrul stâng sugerează inducţia după $k$, anume exprimarea $1 + \frac{2^{k+1}-1}{n} = \left(1 + \frac{2^k - 1}{n'}\right)\left(1 + \frac{1}{m}\right)$ (unde, aparent paradoxal, valoarea numitorului $n'$ nu joacă niciun rol special în aplicarea pasului de inducţie, care funcţionează pentru orice numitor). După efectuarea calculelor, ajungem la

$$mn'(2^{k+1} - 1) = n(m(2^k - 1) + n' + (2^k - 1)),$$

din care putem exprima necunoscutele $n'$ şi $m$ pe care le căutăm

$$n' = \frac{n(m+1)(2^k - 1)}{m(2^{k+1} - 1) - n} \quad \text{şi} \quad m = \frac{n(n' + 2^k - 1)}{n'(2^{k+1} - 1) - n(2^k - 1)}.$$

Pentru $n$ impar, luând $m = n$ obţinem $n' = \frac{n(n+1)(2^k - 1)}{n(2^{k+1} - 1) - n} = \frac{n+1}{2}$, iar pentru $n$ par, luând $n' = \frac{n}{2}$ obţinem $m = \frac{2n'(n' + 2^k - 1)}{n'(2^{k+1} - 1) - 2n'(2^k - 1)} = 2(n' + 2^k - 1) = n + 2^{k+1} - 2$.

Astfel, am trecut de la $k$ la $k+1$ adăugând un factor la reprezentarea din membrul drept a unei expresii de exponent $k$, şi totul este demonstrat. □

**Remarcă.** Problema nu este grea, odată ce ne vine ideea inducţiei; totuşi formalităţile sunt complicate prin expresiile diferite, după paritatea lui $n$.[2]

**Subject** (2)**.** *A configuration made of 4027 points in the plane is called* ***Colombian*** *if it consists of 2013 red points and 2014 blue points, and no three of the points of the configuration are collinear. By drawing some lines, the plane is divided into several regions. An arrangement of lines is* ***good*** *for a Colombian configuration if the following two conditions are satisfied:*

- *no line passes through any point of the configuration;*
- *no region contains points of both colours.*

*Find the least value of $k$ such that for any Colombian configuration of 4027 points, there is a good arrangement of $k$ lines.*

AUSTRALIA (Ivan Guo) – C2

**Subiectul** (2)**.** *O configuraţie de 4027 de puncte se numeşte* ***columbiană*** *dacă are 2013 puncte colorate cu roşu şi 2014 puncte colorate cu albastru, şi nu conţine trei puncte coliniare. O mulţime finită de drepte din plan împarte planul în regiuni. O mulţime de drepte se numeşte* ***bună*** *pentru o configuraţie columbiană dacă următoarele două condiţii sunt îndeplinite:*

- *Nicio dreaptă nu trece printr-un punct al configuraţiei,;*
- *Nicio regiune nu conţine puncte de aceeaşi culoare ambele culori (sau, echivalent, culori diferite).*

*Determinaţi cel mai mic număr natural $k$ astfel încât pentru orice configuraţie columbiană de 4027 de puncte să existe o mulţime bună de $k$ drepte.*

AUSTRALIA (Ivan Guo) – C2

[2] Preziceam o medie de punctaj ceva mai scăzută decât de obicei, pentru problema 1, şi acest lucru s-a adeverit; cu excepţia anilor 2005 şi 2007, cea mai mică din ultimii 10 ani.

**Remarcă.** Ce caută calificativul finită, care lipseşte din versiunea oficială din limba engleză? când imediat apoi, definirea unei mulţimi ***bune*** omite acest calificativ ... S-a crezut oare că îi va duce la confuzie pe copii faptul că mai târziu problema se referă la un număr $k$ de drepte, care în cazul unei mulţimi infinite ar fi un cardinal transfinit?

Incidentul cel mai de neînchipuit s-a produs. Traducerea greşită a unei singure propoziţii a transformat problema într-o cu totul altă întrebare. Chiar dacă unii dintre concurenţii români susţin că au dat o soluţie acestei probleme schimbate, desigur că a contat prea puţin în acordarea punctelor – s-au acordat "firimituri" de unul sau două puncte, pentru observaţii care se puteau aplica şi veritabilei probleme. Singurul care a scăpat acestei sorţi crude a fost Ömer, care s-a ghidat după textul original, din limba engleză. Marius a remarcat discrepanţele dintre cele două versiuni, şi a transmis o întrebare de clarificare, în timpul perioadei (în mod normal 1/2 de oră) care este dedicată familiarizării cu problemele, dar răspunsul a venit cu ore de întârziere, datorită unor deficienţe din sistemul de comunicaţii (în sine, de neconceput la o asemenea amploare, în cadrul acestui cel mai important eveniment matematic); răspunsul a fost "citeşte din nou, cu atenţie" (un răspuns tipic, în lipsa altuia). Şi chiar dacă, în mod justificat, a acordat mai multă încredere versiunii oficiale din limba engleză, era deja prea târziu.

Formaţia mea clasicistă mă face să mă întorc la interjecţii din vremuri străvechi. *Quo usque tandem abutere, Catilina, patientia nostra?*; mai pe neaoş româneşte, *Până când, o! Catilina, vei abuza tu de răbdarea noastră?* (înlocuiţi Catilina cu numele corespunzător). Mai încoace în timp de Cicero, regele Henric II rosteşte: *Will no one rid me of this meddlesome priest?*; pe româneşte, *Oare nimeni nu mă va descotorosi de acest popă turbulent?*, referindu-se la Thomas Becket (arhiepiscop de Canterbury). Lucrurile rele trebuie să piară – nu prin moarte violentă, ci prin căderea în desuetudine şi caducitate. Dar nu mă pot opri să exclam, odată cu Cato cel Bătrân, *Carthago delenda est!*; pe româneşte, *Cartagina trebuie distrusă!* (înlocuiţi Cartagina cu numele corespunzător).

Comunicatul de presă pe care SSMR l-a transmis la terminarea olimpiadei conţine două omisiuni conspicue.[3] Prima este lipsa precizării locului pe care s-a plasat România în clasamentul (neoficial) pe naţiuni. Când câştigăm Balcaniada, sau ieşim pe locul 6-8 la Internaţională, acesta este primul lucru menţionat, dar acum terminând pe poziţia 22-24 ... Cea de-a doua este lipsa unui paragraf pe care îmi permit să mi-l închipui sunând astfel

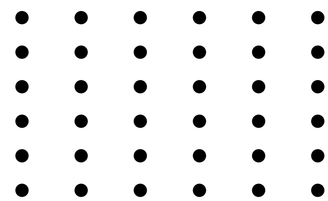
> În urma unui incident regretabil (pe care ni-l asumăm), copiii au primit un enunţ greşit la una dintre probleme, şi nu au putut să-şi apere şansele în mod corespunzător; acest lucru a influenţat în mod covârşitor atât rezultatele lor individuale, cât şi rezultatul final al echipei.

Dar ce să ne mirăm, când un post de televiziune a preluat acest comunicat, şi l-a citit duminică 28 iulie, la "întoarcerea" echipei (care se întorcea de fapt luni 29 iulie), însoţit de imagini filmate pe aeroport! – doar că erau participanţii români de la Olimpiada Internaţională de Informatică ...

[3]Vezi `http://ssmr.ro/comunicate_presa/oim2013`. Mai multe consideraţii asupra acestui comunicat, pe ultima pagină a comentariilor mele.

Întorcându-ne la oile noastre (matematica), voi prezenta în cele ce urmează soluţia acestei elegante şi simple probleme (dacă prima din două idei (clasică) vine, şi apoi ideile sunt puse cap la cap). Prima idee este reminiscentă de mai multe alte exemple bine cunoscute. De exemplu, această problemă culeasă dintr-o broşură din Lituania.

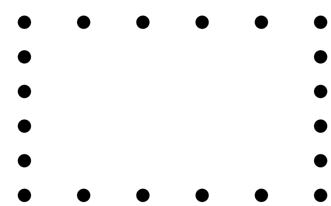
**Problemă.** Fie configuraţia $6 \times 6$ de puncte



Care este numărul minim $d$ de drepte cu care putem separa planul în regiuni, fiecare regiune conţinând cel mult unul dintre punctele configuraţiei?

*Soluţie.* Este uşor de văzut că 10 drepte sunt de ajuns, luând câte 5 drepte orizontale şi 5 drepte verticale, printre liniile şi coloanele configuraţiei. Dar cum arătăm că $d = 10$, adică nu putem face aceasta cu mai puţin de 10 drepte? Este bine cunoscut faptul că numărul maxim de regiuni în care $n$ drepte separă planul este $\dfrac{n(n+1)}{2} + 1$. Deoarece avem nevoie de cel puţin $6^2 = 36$ de regiuni, obţinem inecuaţia $n^2 + n \geq 70$, deci $n \geq 8$. Dar cum arătăm că trebuie $n \geq 10$, adică 8 sau 9 drepte nu sunt suficiente?

Considerăm doar conturul configuraţiei date



Prin fiecare dintre interstiţiile între două puncte consecutive de pe contur trebuie să treacă o dreaptă. Fiecare dreaptă poate trece prin cel mult două astfel de interstiţii, şi cum sunt 20 cu totul, înseamnă că avem nevoie de cel puţin 10 drepte. □

Sau versiunea planară a Problemei 6 de la OIM 2007 din Vietnam (la care nimeni nu a reuşit să găsească o soluţie pur combinatorică, existând doar câteva – extrem de puţine – soluţii algebrice).

**Problemă.** Fie $m, n$ numere naturale nenule. Considerăm

$$S(m,n) = \{(x,y) \mid x \in \{0,1,\ldots,m\},\ y \in \{0,1,\ldots,n\},\ x+y>0\}$$

ca mulţime de $(m+1)(n+1)-1$ puncte în plan. Determinaţi cel mai mic număr de drepte a căror reuniune conţine $S(m,n)$ dar nu conţine $(0,0)$.

*Soluţie Combinatorică.* Este uşor de văzut că $m+n$ drepte sunt de ajuns, anume dreptele $x = i$, $1 \leq i \leq m$, şi $y = j$, $1 \leq j \leq n$. Dar cum arătăm că nu putem face aceasta cu mai puţin de $m+n$ drepte?

Fiecare dreaptă poate trece prin cel mult două dintre cele $2(m+n)-1$ puncte ale conturului

$$\partial S(m,n) = \{(x,y) \in S(m,n) \mid x \in \{0,m\} \text{ sau } y \in \{0,n\}\},$$

în afară de dreptele $x = m$ sau $y = n$ (dreptele $x = 0$ şi $y = 0$ nu pot fi folosite, căci ele conţin $(0,0)$). Prin urmare, dacă niciuna dintre drepte nu este $x = m$ sau $y = n$, avem nevoie de cel puţin $\left\lceil \dfrac{2(m+n)-1}{2} \right\rceil = m+n$ drepte. În caz contrar, una dintre drepte este precizată, şi problema este redusă la cazul $S(m-1,n)$ sau $S(m,n-1)$. O simplă inducţie după $m+n$ furnizează acum acelaşi răspuns de $m+n$ (şi la nevoie, cazurile $m=0$ sau $n=0$ sunt triviale). $\square$

Putem acum proceda către soluţia problemei originale (versiunea corectă).

*Soluţie.* O observaţie imediată este că dacă luăm două drepte paralele cu o dreaptă care uneşte două puncte de aceeaşi culoare (de o parte şi cealaltă a acestei drepte), şi dacă lăţimea benzii determinate de ele este suficient de mică, atunci banda nu mai conţine alte puncte decât cele două (aceasta rezultă din finitudinea numărului de puncte şi din faptul că nu există trei puncte coliniare). Vom numi o astfel de bandă *nanotub*. Dacă înfăşurătoarea convexă a configuraţiei conţine (măcar) un vârf roşu, îl putem separa de toate celelalte printr-o dreaptă (suficient de aproape de el), iar celelalte 2012 puncte roşii pot fi încadrate în 1006 nanotuburi, utilizând alte 2012 drepte. Dacă înfăşurătoarea convexă a configuraţiei conţine doar vârfuri albastre, putem separa două consecutive de toate celelalte printr-o dreaptă (suficient de aproape de ele), iar celelalte 2012 puncte albastre pot fi încadrate în 1006 nanotuburi, utilizând alte 2012 drepte. În concluzie, 2013 drepte sunt suficiente pentru ca nicio regiune să nu conţină puncte de ambele culori.

Pe de altă parte, utilizând metoda prezentată mai sus, putem considera o configuraţie cu 2013 puncte roşii şi 2013 albastre, dispuse alternativ ca vârfuri ale unui poligon convex cu 4026 de laturi; cum prin fiecare interstiţiu trebuie să treacă o dreaptă, avem nevoie de cel puţin 2013 drepte. $\square$

Prezintă un anume interes însă şi soluţia problemei traduse (versiunea incorectă). Pentru uşurinţa notaţiilor, putem înlocui 2013 cu $n$.

*Soluţie.* Evident, o astfel de separare înseamnă că fiecare regiune este sau vidă, sau conţine un singur punct, sau dacă nu, conţine exact două puncte, de culori diferite.

Faptul că $n$ drepte sunt necesare reiese dintr-o construcţie şi ea inspirată de cele de mai sus. Fie o configuraţie unde punctele sunt vârfurile unui poligon convex cu $2n+1$ laturi, cu cele $n$ vârfuri roşii contigue (şi deci cele $n+1$ vârfuri albastre şi ele contigue); cum prin fiecare dintre cele $n-1$ interstiţii între punctele roşii şi prin fiecare dintre cele $n$ interstiţii între punctele albastre trebuie să treacă o dreaptă, avem nevoie de cel puţin $\lceil((n-1)+n)/2\rceil = n$ drepte.

Argumentarea că $n$ drepte sunt şi suficiente o vom face prin inducţie după $n$. Cazul $n=1$ de început este trivial. Pentru $n+1$ puncte roşii şi $n+2$ puncte albastre, alegem o(rice) pereche $(r,a)$ de puncte roşu/albastru. Configuraţia celorlalte puncte poate fi separată prin $n$ drepte, conform cu ipoteza de inducţie (şi care nu trec nici prin cele două puncte $r,a$ alese, din considerente de continuitate – dacă e cazul, le "zgâlţâim" puţin). Acum

• dacă $r,a$ se află în regiuni diferite, cazul cel mai rău este când regiunea unde se află $r$ conţine şi un alt punct roşu $r'$, iar regiunea unde se află $a$ conţine şi un alt punct albastru $a'$. O dreaptă suplimentară care uneşte un punct interior segmentului $rr'$ cu unul interior segmentului $aa'$ (şi care nu trece printr-un punct al configuraţiei – vezi mai sus) ne oferă acum separarea;

• dacă $r, a$ se află în aceeaşi regiune, cazul cel mai rău este când regiunea mai conţine şi un alt punct roşu $r'$, şi un alt punct albastru $a'$. O dreaptă suplimentară care uneşte un punct interior segmentului $rr'$ cu unul interior segmentului $aa'$ (şi care nu trece printr-un punct al configuraţiei – vezi mai sus) ne oferă acum separarea.

Prin urmare, numărul minim de drepte cerut (pentru separare) este $n$. □

Personal, cred că această problemă este chiar mai dificilă decât problema originală – dar poate este doar o chestiune de gust. Să fie oare o coincidenţă că răspunsul este acelaşi, deşi problemele sunt exact opuse una alteia?

Mi-am pus şi această întrebare naturală, în cea mai mare generalitate.

> Care este numărul minim de drepte care pot separa orice configuraţie de $N$ puncte în poziţie generală (trei câte trei necoliniare)? dreptelor nefiind permis să treacă prin aceste puncte, şi astfel încât regiunile determinate de ele să conţină cel mult un punct.

*Soluţie (Schiţă).* Desigur $\lfloor N/2 \rfloor$ drepte nu sunt totdeauna de ajuns; cel mai simplu contraexemplu este $N = 3$, necesitând 2 drepte. Faptul că răspunsul este $\lceil N/2 \rceil$ este menţionat şi demonstrat în

`http://www.matem.unam.mx/~urrutia/online_papers/SeparPoints.pdf`

dar acest articol este mai degrabă interesat în metode algoritmice. O soluţie elementară există; anecdotic, a fost concomitent dată la faţa locului de liderii echipei Israelului, în încercarea (chiar încununată de succes) de a folosi acest rezultat ca o lemă către problema din concurs.

Limitarea inferioară dată de $\lceil N/2 \rceil$ provine, iarăşi, din metoda expusă pe larg mai sus. Faptul că acest număr de drepte este şi suficient, vi-l las să-l decoperiţi singuri! Nicio coincidenţă deci; doar condiţii mai relaxate ... □

**Subject** (3)**.** *Let the excircle of triangle $ABC$ opposite the vertex $A$ be tangent to the side $BC$ at the point $A_1$. Define the points $B_1$ on $CA$ and $C_1$ on $AB$ analogously, using the excircles opposite $B$ and $C$, respectively. Suppose that the circumcentre of triangle $A_1B_1C_1$ lies on the circumcircle of triangle $ABC$. Prove that triangle $ABC$ is right-angled.*

*(The **excircle** of triangle $ABC$ opposite the vertex $A$ is the circle that is tangent to the line segment $BC$, to the ray $AB$ beyond $B$, and to the ray $AC$ beyond $C$. The excircles opposite $B$ and $C$ are similarly defined.)*

RUSSIA – G6

**Subiectul** (3)**.** *Cercul exînscris corespunzător vârfului $A$ al triunghiului $ABC$ este tangent la latura $BC$ în punctul $A_1$. Definim analog punctele $B_1$ pe latura $CA$ şi $C_1$ pe latura $AB$. Presupunem că centrul cercului circumscris triunghiului $A_1B_1C_1$ aparţine cercului circumscris triunghiului $ABC$. Demonstraţi că triunghiul $ABC$ este dreptunghic.*

*(**Cercul exînscris** în triunghiul $ABC$ corespunzător vârfului $A$ este cercul tangent laturii $BC$ şi dreptelor $AB$ şi $AC$, dar nu laturilor $AB$ şi $AC$. Cercurile exînscrise corespunzătoare vârfurilor $B$ şi $C$ se definesc analog.)*
*(Cercul **exînscris** corespunzător vârfului $A$ al triunghiului $ABC$ este cercul tangent laturii $BC$ şi semidreptelor $(AB$ şi $(AC$, dar nu laturilor $AB$, $AC$.)*

RUSIA – G6

**Remarcă.** Dacă tot a fost oferită definiţia unui cerc exînscris, ar fi trebuit respectat textul enunţului oficial din limba engleză, numind **semidreptele** $(AB$ şi $(AC$, în locul dreptelor $AB$ şi $AC$. Apoi, cum textul din limba română deviază uşor de la varianta oficială, ne mai folosind în mod explicit celelalte două cercuri exînscrise, ce rost mai avea, în nota explicativă, să se mai păstreze referinţa la ele? (ceea ce în versiunea oficială era imperativ, căci se făcea numire la ele mai sus) Chiar şi nota explicativă însăşi deviază de la terminologia exactă folosită în enunţ, şi pe care vrea s-o precizeze (în timp ce versiunea oficială urmează scrupulos acea terminologie, *ad litteram*).

## 3. OIM 2013, ZIUA 2 (24 IULIE 2013 – 3 PROBLEME/4 1/2 ORE)

**Subject** (4)**.** *Let $ABC$ be an acute-angled triangle with orthocentre $H$, and let $W$ be a point on the side $BC$, lying strictly between $B$ and $C$. The points $M$ and $N$ are the feet of the altitudes from $B$ and $C$, respectively. Denote by $\omega_1$ the circumcircle of $BWN$, and let $X$ be the point on $\omega_1$ such that $WX$ is a diameter of $\omega_1$. Analogously, denote by $\omega_2$ the circumcircle of $CWM$, and let $Y$ be the point on $\omega_2$ such that $WY$ is a diameter of $\omega_2$. Prove that $X$, $Y$ and $H$ are collinear.*

THAILAND – G1

**Subiectul** (4)**.** *Fie $ABC$ un triunghi ascuţitunghic cu ortocentrul $H$, şi fie $W$ un punct situat în interiorul laturii $BC$. Punctele $M$ şi $N$ sunt picioarele înălţimilor din $B$, respectiv $C$. Notăm cu $\omega_1$ cercul circumscris triunghiului $BWN$; şi fie $X$ punctul diametral opus lui $W$ în cercul $\omega_1$. Analog, notăm cu $\omega_2$ cercul circumscris triunghiului $CWM$; şi fie $Y$ punctul diametral opus lui $W$ în cercul $\omega_2$. Demonstraţi că punctele $X$, $Y$ şi $H$ sunt coliniare.*

TAILANDA – G1

*Soluţie.* Unele soluţii şi comentarii de pe AoPS fac referinţă la teoremele lui REIM şi SONDAT

`http://www.reunion.iufm.fr/Recherche/Expressions/22/Ayme.pdf`

`http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/Docs/Le%20theoreme%20de%20Sondat.pdf`

Nu mă pricep îndeajuns în subiecte de geometrie ca să mă pronunţ printr-o judecată de valoare; poate merită studiate. □

**Remarcă.** Dacă toată lumea spune că problema este extrem de uşoară, cine sunt eu, să contrazic? Înseamnă că într-adevăr trebuie să fi fost foarte uşoară. Oricum, numărul extrem de mare de soluţii şi metode, ca şi media mare de punctaj obţinut de massa concurenţilor, toate joacă în favoarea acestei caracterizări.

**Subject** (5)**.** *Let $\mathbb{Q}_{>0}$ be the set of positive rational numbers.*
*Let $f\colon \mathbb{Q}_{>0} \to \mathbb{R}$ be a function satisfying the following three conditions:*

*(i) for all $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$, we have $f(x)f(y) \geq f(xy)$;*
*(ii) for all $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$, we have $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$;*
*(iii) there exists a rational number $a > 1$ such that $f(a) = a$.*

*Prove that $f(x) = x$ for all $x \in \mathbb{Q}_{>0}$.*

BULGARIA (Nikolay Nikolov?) – A3

**Subiectul** (5)**.** *Fie $\mathbb{Q}_{>0}$ mulţimea numerelor raţionale strict pozitive. Fie $f\colon \mathbb{Q}_{>0} \to \mathbb{R}$ o funcţie ce îndeplineşte următoarele trei condiţii:*

*(i) Pentru orice $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$ avem $f(x)f(y) \geq f(xy)$,;*
*(ii) Pentru orice $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$ avem $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$,;*
*(iii) Există un număr raţional $a > 1$ astfel încât $f(a) = a$.*

*Demonstraţi că $f(x) = x$ pentru orice $x \in \mathbb{Q}_{>0}$.*

BULGARIA (Nikolay Nikolov?) – A3

**Remarcă.** Personal, aş fi folosit notaţia standard din şcolile noastre $\mathbb{Q}_{+}^{*}$. Deşi această observaţie pare să se bată cap în cap cu recomandarea mea generală de a nu schimba enunţurile oficiale, aici fac excepţie.

**Subject** (6)**.** *Let $n \geq 3$ be an integer, and consider a circle with $n + 1$ equally spaced points marked on it. Consider all labellings of these points with the numbers $0, 1, \ldots, n$ such that each label is used exactly once; two such labellings are considered to be the same if one can be obtained from the other by a rotation of the circle. A labelling is called **beautiful** if, for any four labels $a < b < c < d$ with $a + d = b + c$, the chord joining the points labelled $a$ and $d$ does not intersect the chord joining the points labelled $b$ and $c$. Let $M$ be the number of beautiful labellings, and let $N$ be the number of ordered pairs $(x, y)$ of positive integers so that $x+y \leq n$ and $\gcd(x, y) = 1$. Prove that*

$$M = N + 1.$$

RUSSIA (A. Golovanov & M. Ivanov) – C7

**Subiectul** (6)**.** *Fie $n \geq 3$ un număr întreg şi fie un cerc pe care marcăm $n+1$ puncte echidistante. Considerăm toate numerotările acestor puncte cu numerele $0, 1, \ldots, n$ astfel încât fiecare număr este folosit exact o dată; două astfel de numerotări se consideră identice dacă ele coincid printr-o rotaţie a cercului. O numerotare se numeşte **frumoasă** dacă pentru oricare patru numere $a < b < c < d$ cu $a+d = b+c$, coarda ce uneşte punctele numerotate cu $a$ şi $d$ nu intersectează coarda ce uneşte punctele numerotate cu $b$ şi $c$. Fie $M$ numărul de numerotări frumoase, şi fie $N$ numărul perechilor $(x, y)$ ordonate de numere naturale nenule cu $x + y \leq n$ şi $\mathrm{cmmdc}(x, y) = 1$. Demonstraţi că*

$$M = N + 1.$$

RUSIA (A. Golovanov & M. Ivanov) – C7

**Remarcă.** Folosirea din limba engleză a expresiei "labelling" permite mai apoi referirea la "labels". În limba română aceasta se putea traduce *verbatim* prin **"etichetare"**, ceea ce permite mai apoi referirea la **"etichete"**. S-a folosit însă expresia "numerotare", aşa că mai apoi referirea s-a făcut la "numere", ceea ce nu mai este de loc precis, căci tot numere sunt şi valori altele decât cele de la 0 la $n$, folosite la numerotare. Cuvântul "număr" este prea generic pentru acest scop, în timp ce cuvântul **"etichetă"** era tocmai potrivit de specific. Desigur, nimic atât de grav ca incidentul cu Problema 2, căci cu un potenţial foarte redus de a duce la confuzie, dar, iarăşi, ar fi trebuit folosită o variantă mai exactă. A devenit aproape o modă, mai ales la această ultimă competiţie, să nu se respecte *mot-à-mot* versiunea oficială; oare de ce?

Echipa României continuă să aibă o prestaţie slabă la problemele 3 şi 6. Mai ales în condiţii ca anul acesta, când problema 3 a fost mai accesibilă decât de obicei, acesta este un mare handicap către obţinerea unei medalii de aur şi/sau în plasarea pe o poziţie fruntaşă în clasamentul pe naţiuni. Dinu Şerbănescu îmi atrage atenţia că problema 3 a fost rezolvată de 41 de concurenţi, şi s-au acordat 45 de medalii de aur – nu este chiar o simplă coincidenţă! Iar noi, de ani buni încoace, nu prea mai avem soluţii complete la problemele 3 şi 6. Pe de altă parte, această problemă 3 de geometrie, mai uşoară ca de obicei, a avut drept efect favorizarea specialiştilor în geometrie, în detrimentul celora care – ca mine – nu sunt chiar foarte adepţi, în timp ce geometria sintetică este de fapt domeniul cel mai desuet al olimpiadei.

## 4. ÎNCHEIERE

De data aceasta, site-ul oficial a fost mai lent în a disemina informaţiile concursului. Enunţurile au apărut (în toate limbile ţărilor participante) de abia pe 26 iulie; din păcate, soluţiile oficiale şi baremele de coordonare nu apar niciodată, soluţiile din Lista Scurtă devenind disponibile de abia peste un an, după începerea următoarei OIM.[4] Rezultatele finale au apărut pe 27 iulie, mult înainte de festivitatea de premiere propriu-zisă ☺

În mod ciudat, acest OIM a durat cu două zile mai puţin decât oricare dintre celelalte ultime cinci ediţii!?! Concursul nu a fost unul dintre cele mai dificile, iar problemele s-au situat în limitele normale de frumuseţe.

Au participat 97 de ţări, cu un total de 528 de concurenţi. Rezultatele echipei noastre la OIM 2013, Columbia, sunt, cu felicitările de rigoare!

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Radu GOLOGAN** | | Bucureşti | | Leader |
| **Mihai BĂLUNĂ** | | Bucureşti | | Deputy |
| **Dinu ŞERBĂNESCU** | | Bucureşti | | Observer A |
| **Nume** | | **Şcoala** | **Puncte** | **Medalie** |
| **Ştefan SPĂTARU** | X | ICHB, Bucureşti | 25 | Argint |
| **Ömer CERRAHOĞLU** | XI | C.N. Gh. Şincai, Baia Mare | 30 | Argint |
| **Viorel-Andrei BUD** | XI | ICHB, Bucureşti | 21 | Bronz |
| **Hai TRAN-BACH** | XI | ICHB, Bucureşti | 17 | Bronz |
| **Ştefan GRAMATOVICI** | XI | C.N. T. Vianu, Bucureşti | 17 | Bronz |
| **Marius BOCANU** | X | ICHB, Bucureşti | 24 | Argint |
| **Echipa României** | | | **134/252** | **22-24/97** |

Punctajul detaliat pe probleme este

| Nume | P1 | P2 | P3 | P4 | P5 | P6 | Total | Medalie |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Ştefan SPĂTARU** | 7 | 2 | 0 | 7 | 7 | 2 | 25 | Argint |
| **Ömer CERRAHOĞLU** | 7 | 7 | 2 | 7 | 7 | 0 | 30 | Argint |
| **Viorel-Andrei BUD** | 7 | 0 | 0 | 7 | 7 | 0 | 21 | Bronz |
| **Hai TRAN-BACH** | 7 | 1 | 0 | 7 | 2 | 0 | 17 | Bronz |
| **Ştefan GRAMATOVICI** | 7 | 1 | 0 | 7 | 2 | 0 | 17 | Bronz |
| **Marius BOCANU** | 4 | 0 | 7 | 7 | 6 | 0 | 24 | Argint |
| **Echipa României** | **39** | **11** | **9** | **42** | **31** | **2** | **134/252** | **22-24/97** |

[4]Comunitatea de useri de pe AoPS (`www.mathlinks.ro`) a fost însă extrem de rapidă; enunţurile au apărut la doar câteva minute după terminarea probelor.

Câteva comentarii finale. Patru dintre participanţii din România sunt de la ICHB (Liceul Internaţional de Informatică din Bucureşti), unde mă simt onorat să îi întâlnesc (aproape) săptămânal, cu ocazia prelegerilor mele de combinatorică (şi nu numai); dar nici Ömer sau Ştefan G. nu-mi sunt chiar străini! Fac această precizare, căci comunicatul de presă al SSMR anunţă şi el, cu o lejeră lipsă de tact

> Menţionăm că primii paşi spre performanţă în matematică ai lui Ştefan Spătaru, Marius Bocanu şi Andrei Bud au fost făcuţi la Alexandria, Piteşti, respectiv Negreşti-Oaş, de unde sunt originari şi s-au îndreptat spre excelenţă ca bursieri ai Liceului Internaţional de Informatică, Bucureşti.

Am îndreptat lipsa diacriticelor şi literele lipsă; în plus, Ömer este listat acolo ca fiind elev la C.N. Vasile Lucaciu din Baia Mare, şi nu C.N. Gheorghe Şincai, cum este corect. Numele lui Tran Bach Hai este şi el stâlcit în Tram Bah Hai. În fine, deşi pentru jBMO şi BMO comunicatele de presă anunţau poziţionarea României în clasamentul pe ţări (fiind locul 1 în ambele cazuri), acum se păstrează o tăcere discretă (fiind locul 22-24). Cuvântul bursieri este şi el folosit în mod abuziv – nu vorbim de un "bursier al fundaţiei D∗n V∗i∗u∗e∗c∗", *par exemple;* acei copii sunt elevi la ICHB, scutiţi de taxele şcolare (percepute de acest liceu privat), pe baza valorii arătate de ei în competiţiile matematice. Tehnic vorbind, "bursier" nu intră în terminologia instituţiei cu pricina.

Şi dacă tot am deschis subiectul comunicatelor de presă date de SSMR, următorul preambul precede anunţarea diverselor echipe selectate pentru concursurile internaţionale.

> După o perioadă de pregătire şi testări, desfăşurate pe parcursul întregului an şcolar şi finalizate cu două stagii de pregătire la Bucureşti, au fost stabilite loturile de elevi români participanţi la concursurile internaţionale de matematică din 2013.

O declaraţie gongorică, atât în ceea ce priveşte perioada menţionată, cât şi conţinutul activităţilor desfăşurate; *à bon entendeur, salut* ...

S-au acordat 45 medalii de Aur (41-31 puncte, 8.5%), 92 medalii de Argint (30-24 puncte, 17.5%) şi 141 medalii de Bronz (23-15 puncte, 26.5%), relativ la un total de 528 de participanţi, din 97 de ţări.

România s-a plasat pe locul 22-24 în clasamentul (neoficial) pe naţiuni, cel mai slab rezultat din cele 54 de participări neîntrerupte la OIM, începând cu prima ediţie din 1959. O consecinţă neplăcută, dar firească a incidentului cu Problema 2.

Recomand `http://www.bmoc.maths.org/home/imo.shtml`, unde se pot găsi rapoartele detaliate ale şefului delegaţiei UK. Găsiţi istoricul din 1967, de la prima participare UK la IMO; de cele mai multe ori – mai ales dacă raportorul este chiar Geoff Smith – materialul este un model de bună sintaxă şi umor (cu uneori şi tonuri ironice sau sarcastice); în general, o lectură de calitate. Un exemplu de neuitat este raportul la IMO 2010 Kazahstan, cu link `http://www.imo-register.org.uk/2010-report.pdf`