Problema 2. Determinaţi mulţimile A şi B de numere naturale nenule care satisfac simultan condiţiile:

i) $A \cap B = \{2\}$;

ii) Cel mai mare element al mulţimii $A \cup B$ este cel mult egal cu 6;

iii) Pentru orice $a \in A$ există $b \in B$ astfel încât $a + b$ este pătrat perfect;

iv) Pentru orice $b \in B$ există $a \in A$ astfel încât $b - a$ este pătrat perfect;

Adriana şi Lucian Dragomir, Oţelu-Roşu

Soluţie Dacă $A = \{2\}$, atunci putem avea $B = \{2\}$, $B = \{2, 3\}$, $B = \{2, 6\}$, $B = \{2, 3, 6\}$.

Dacă $1 \in A$, atunci $3 \in B$ (numai $1 + 3$ dă pătrat perfect). Mai mult $4 \notin B$ pentru că numai $4 - 3$ dă un pătrat perfect, iar $3 \notin A$. De asemenea $5 \notin A$ deoarece numai $5 + 4$ dă pătrat perfect, iar $4 \notin B$.

Sunt posibile cazurile

1. Dacă $A = \{1, 2\}$, atunci putem avea $B = \{2, 3\}$, $B = \{2, 3, 5\}$, $B = \{2, 3, 6\}$, $B = \{2, 3, 5, 6\}$.

2. Dacă $A = \{1, 2, 4\}$, atunci putem avea $B = \{2, 3, 5\}$, $B = \{2, 3, 5, 6\}$.

3. Dacă $A = \{1, 2, 6\}$, atunci putem avea $B = \{2, 3\}$, $B = \{2, 3, 5\}$.

4. Dacă $A = \{1, 2, 4, 6\}$, atunci putem avea $B = \{2, 3, 5\}$.

Dacă $1 \notin A$, atunci $1 \notin B$ deoarece, din $1 - a$ pătrat perfect ar rezulta $a = 0 \in A$ (dar elementele lui A şi B sunt nenule) sau $a = 1 \in A$ (în contradicţie cu condiţia i).

Dacă $3 \in A$, atunci $6 \in B$ (numai $3 + 6$ este pătrat perfect). Evident $6 \notin A$ deoarece s-ar contrazice condiţia i.

Sunt posibile cazurile

1. Dacă $A = \{2, 3\}$, atunci putem avea $B = \{2, 6\}$, $B = \{2, 4, 6\}$.

2. Dacă $A = \{2, 3, 4\}$, atunci putem avea $B = \{2, 5, 6\}$.

3. Dacă $A = \{2, 3, 5\}$, atunci putem avea $B = \{2, 4, 6\}$.

Dacă $1 \notin A$ şi $3 \notin A$, iar $4 \in A$, atunci $5 \in B$ (numai $4 + 5$ este pătrat perfect). Evident $5 \notin A$ deoarece s-ar contrazice condiţia i.

Sunt posibile cazurile

1. Dacă $A = \{2, 4\}$, atunci putem avea $B = \{2, 5\}$, $B = \{2, 3, 5\}$, $B = \{2, 5, 6\}$, $B = \{2, 3, 5, 6\}$.

2. Dacă $A = \{2, 4, 6\}$, atunci putem avea $B = \{2, 5, 3\}$.

Dacă $1 \notin A$ şi $3 \notin A$, iar $5 \in A$, atunci $4 \in B$ (numai $4 + 5$ este pătrat perfect). Dar $4 \in B$ necesită $3 \in A$ (numai $4-3$ dă pătrat perfect) ceea ce contrazice condiţiile impuse. Prin urmare, această situaţie nu este posibilă.

Dacă $1 \notin A$ şi $3 \notin A$, iar $6 \in A$, atunci $3 \in B$ (numai $6 + 3$ este pătrat perfect). Avem $A = \{2, 6\}$ şi $B = \{2, 3\}$.