

Clasa a X-a - Etapa 2 - Problema 3

Enunț. Fie a, b, c, d numere strict pozitive în progresie aritmetică. Arătați că:

- a) $\log_2 a + \log_2 d \leq \log_2 b + \log_2 c$;
- b) $2^a + 2^d \geq 2^b + 2^c$.

Soluție. Dacă r este rația progresiei, atunci $b = a + r$, $c = a + 2r$ și $d = a + 3r$.

- a) Inegalitatea este echivalentă cu $ad \leq bc$ sau $a(a + 3r) \leq (a + r)(a + 2r)$ ceea ce este adevărat.
- b) Inegalitatea este echivalentă cu $1 + 2^{3r} \geq 2^r + 2^{2r}$ care se demonstrează că este adevărată, folosind eventual notația $2^r = t$. □