Problema 3. Fie triunghiul ABC dreptunghic în A, cu $m(\angle ABC) = 30°$. Bisectoarea unghiului $\angle C$ intersectează pe AB în D. Notăm cu F şi E mijloacele laturilor $[BC]$ şi respectiv $[AB]$. Dacă $M \in (FD)$ şi $S \in (CD)$ sunt puncte alese astfel încât $AB = 4FM = 4SM$, atunci arătaţi că $AS \perp SE$.

Adrian Bud, Negreşti Oaş

Soluţie:

Triunghiul CDB este isoscel, căci $m(\angle ACB) = 60°$ şi deci $m(\angle DCB) = m(\angle DBC) = 30°$; prin urmare $CD = DB$. Rezultă de aici că triunghiul FDB este dreptunghic în F, cu $m(\angle DBF) = 30°$, deci $DB = 2FD$.

Analog, din triunghiul dreptunghic CAD, cu $m(\angle ACD) = 30°$, rezultă $DC = 2AD$. Obţinem astfel că $FD = AD$.

Fie P mijlocul segmentului $[AE]$. Avem $AP = \frac{AE}{2} = \frac{AB}{4} = FM$. Rezultă că $PD = MD$, ca diferenţă de lungimi de segmente, respectiv congruente.

Prin urmare $\triangle SPD \equiv \triangle SMD$ (L.U.L.), de unde rezultă că

$$SP = SM = FM = \frac{AB}{4} = \frac{AE}{2}.$$

Astfel $SP = AP = PE$, adică triunghiul ASE este dreptunghic în S şi în concluzie $AS \perp SE$.