

Problema 3. Se consideră, la întâmplare, 5 numere naturale. Arătați că putem alege două dintre ele a căror sumă sau diferență se divide cu 6.

* * *

Soluție: Folosim principiul cutiei.

La împărțirea la 6 a unui număr natural sunt posibile resturile: 0, 1, 2, 3, 4 sau 5.

Formăm cutiile „0”, „1 și 5”, „2 și 4”, „3”. Sunt 4 cutii și 5 obiecte (numerele). Conform principiului cutiei, există cel puțin o cutie cu cel puțin două obiecte.

Dacă cele două numere sunt în cutia „0” sau cutia „3”, atunci și suma și diferența se divid cu 6.

Dacă cele două numere sunt în cutia „1 și 5” sunt posibile cazurile:

Cazul 1. $n_1 = 6k + 1$ și $n_2 = 6p + 1$, unde k și p sunt numere naturale.

Atunci $n_1 - n_2 = 6(k - p)$, deci divizibil cu 6.

Cazul 2. $n_1 = 6k + 5$ și $n_2 = 6p + 5$, unde k și p sunt numere naturale.

Atunci $n_1 - n_2 = 6(k - p)$, deci divizibil cu 6.

Cazul 3. $n_1 = 6k + 1$ și $n_2 = 6p + 5$, unde k și p sunt numere naturale.

Atunci $n_1 + n_2 = 6k + 6p + 6 = 6(k + p + 1)$, deci divizibil cu 6.

Analog se tratează situația cu cele două numere în cutia „2 și 4”.