Problema 4. Pe dreapta d se iau punctele distincte A şi B, iar pe $AB \setminus [AB]$ se consideră 2015 puncte distincte. Să se arate că suma distanţelor de la punctul A la cele 2015 puncte este diferită de suma distanţelor de la punctul B la cele 2015 puncte.

Cătălin Budeanu, Iaşi

Rezolvare:

Notăm cu S_1 și S_2 suma distanțelor de la A respectiv B la cele 2015 puncte.

$S_1 = A_1A + A_2A + \ldots + A_mA + A_{m+1}A + \ldots + A_{2015}A = A_1A + A_2A + \ldots A_mA + $
$+ \underline{AB} + BA_{m+1} + \ldots + \underline{AB} + BA_{2015} = A_1A + A_2A + \ldots + A_mA + BA \cdot (2015-m) +$
$+ BA_{m+1} + \ldots + BA_{2015}$

$S_2 = A_1B + A_2B + \ldots + A_mB + A_{m+1}B + \ldots + A_{2015}B = \underline{AB} + AA_1 + AA_2 + \underline{AB} + \ldots + \underline{AB} +$
$+ AA_m + BA_{m+1} + \ldots + BA_{2015} = AB \cdot m + BA_1 + BA_2 + \ldots + BA_m + BA_{m+1} + \ldots + BA_{2015}.$

Presupunem că $S_1 = S_2$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow A_1A + A_2A + \ldots + A_mA + BA_{m+1} + \ldots + BA_{2015} + BA \cdot (2015-m) = AB \cdot m + AA_1 + AA_2 + \ldots + AA_m +$
$+ BA_{m+1} + \ldots + BA_{2015} \mid - BA_{m+1} - \ldots - BA_{2015} - AA_1 - AA_2 - \ldots - AA_m \Rightarrow$

$\Rightarrow BA \cdot (2015-m) = AB \cdot m \mid : AB \Rightarrow$

$\Rightarrow 2015 - m = m \mid + m \Rightarrow 2015 = 2 \cdot m \Rightarrow m = \frac{2015}{2} \notin \mathbb{N} \Rightarrow$ contradicție. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ presupunerea făcută e falsă, deci $S_1 \neq S_2$

Bunget Andreea-Maria.