Enunţ: *Se consideră triunghiul ascuţitunghic* ABC *şi punctele* $D \in (BC)$, $E \in (CA)$ *şi* $F \in (AB)$ *astfel încât* $\frac{DB}{DC} = \frac{EC}{EA} = \frac{FA}{FB}$. *Notăm cu* T *punctul Toricelli-Fermat a triunghiului* ABC.

a) *Demonstraţi că* $BC^2 = TB^2 + TC^2 + TB \cdot TC$;

b) *Demonstraţi că* $2(TD + TE + TF) \geq TA + TB + TC$.

Soluţie:

a) Avem $m(\sphericalangle BTC) = 120^\circ$ şi relaţia este consecinţă a aplicării teoremei cosinusului în triunghiul TBC.

b) Fie $\alpha, \beta > 0$ astfel încât $\frac{DB}{DC} = \frac{EC}{EA} = \frac{FA}{FB} = \frac{\alpha}{\beta}$. Relaţia lui Stewart aplicată în triunghiul TBC conduce la $TD^2 \cdot BC = TB^2 \cdot DC + TC^2 \cdot DB - DC \cdot DB \cdot BC$, adică $TD^2 = \frac{\beta^2 TB^2 + \alpha^2 TC^2 - \alpha\beta TB \cdot TC}{(\alpha + \beta)^2}$.

Analog $TE^2 = \frac{\beta^2 TC^2 + \alpha^2 TA^2 - \alpha\beta TC \cdot TA}{(\alpha + \beta)^2}$ şi $TF^2 = \frac{\beta^2 TA^2 + \alpha^2 TB^2 - \alpha\beta TA \cdot TB}{(\alpha + \beta)^2}$. Atunci

$$2\sum TD = \frac{1}{\alpha+\beta}\sum\sqrt{4\beta^2 TB^2 + 4\alpha^2 TC^2 - 4\alpha\beta TB \cdot TC} = \frac{1}{\alpha+\beta}\sum\sqrt{2\beta^2 TB^2 + 2\alpha^2 TC^2 + 2(\beta TB - \alpha TC)^2}$$

$$\geq \frac{1}{\alpha+\beta}\sqrt{2\left(\sum \beta TB\right)^2 + 2\left(\sum \alpha TC\right)^2 + 2\left(\sum(\beta TB - \alpha TC)\right)^2}$$

$$= \frac{1}{\alpha+\beta}\sqrt{\left(4\alpha^2 + 4\beta^2 - 4\alpha\beta\right)\left(\sum TB\right)^2} = \frac{\sqrt{4\alpha^2 + 4\beta^2 - 4\alpha\beta}}{\alpha+\beta}\left(\sum TB\right).$$

Cum $4\alpha^2 + 4\beta^2 - 4\alpha\beta \geq (\alpha + \beta)^2$, obţinem concluzia.