Problema 4. **Fie cercul** $\mathcal{C}(O, r = OM)$**, cercul** $\mathcal{C}_1(O_1, O_1M = \frac{r}{2})$ **şi cercul** $\mathcal{C}_2(O_2, \frac{r}{2})$**, unde** $\{O_1\} \in [OM]$ **şi** $\{O_2\}$ **este diametral opus punctului** $\{M\}$**.**

Se duce tangenta AB **(**$\{A\} \in \mathcal{C}_2$**,** $\{B\} \in \mathcal{C}_1$**), comună cercurilor** $\mathcal{C}_1$ **şi** $\mathcal{C}_2$**, care taie segmentul** $[O_2O]$ **în punctul** $\{E\}$**. Tangenta în** $\{M\}$ **la cercul** $\mathcal{C}$ **taie pe** AB **în** $\{C\}$ **şi fie** $BO_1 \cap CM = \{D\}$**.**

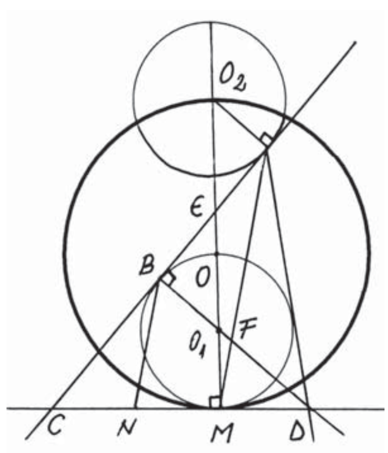
Să se arate că:

a) AD **este tangentă cercului** $\mathcal{C}_1$**;**

b) AM **„înjumătăţeşte" segmentul** $[BD]$**.**

Niţă Cristi

Demonstraţie.



a) $\Delta O_2AE \sim \Delta O_1BE$ (deoarece $O_2A \perp AB$ şi $O_1B \perp AB$) $\Rightarrow O_2A \| O_1B$. În plus $O_2E = O_1E = O_2M$, $[O_2A] \equiv [O_1B] = \frac{r}{2}$, de unde rezultă că $\Delta O_2AE \equiv \Delta O_1BE \Rightarrow [AE] \equiv [BE]$ şi $[O_2E] \equiv [O_1E]$ (1).

Cum $\Delta BO_1E \stackrel{\text{U.L.U.}}{\equiv} \Delta MO_1D$ ($[BO_1] \equiv [MO_1] = \frac{r}{2}$, $\widehat{BO_1E} \equiv \widehat{MO_1D}$

Concursul Gazeta Matematică şi ViitoriOlimpici.ro
Ediţia a IV-a 2012-2013

(unghiuri opuse la vârf), $\widehat{EBO_1} \equiv \widehat{DMO_1} = 90°$) rezultă că

$$[BE] \equiv [MD] \overset{(1)}{\Rightarrow} [AE] \equiv [MD].$$

Dar $[O_2E] + [O_1E] = 2r - \frac{r}{2} = \frac{3r}{2} \Rightarrow [O_1E] \equiv [O_2E] = \frac{3r}{4}$ şi în plus $[ME] = [MO_1] + [O_1E] = \frac{r}{2} + \frac{3r}{4} = \frac{5r}{4}$.

Cum $\Delta O_2AE \sim \Delta CME$ ($\widehat{O_2AE} \equiv \widehat{CME} = 90°$, $\widehat{O_2AE} \equiv \widehat{CEM}$ (unghiuri opuse la vârf)), rezultă că

$$\frac{O_2A}{CM} = \frac{AE}{ME} = \frac{EO_2}{EC}, \text{ de unde}$$

$$\frac{\frac{r}{2}}{CM} = \frac{\sqrt{\left(\frac{3r}{4}\right)^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2}}{\frac{5r}{4}} = \frac{\frac{3r}{4}}{EC} \Leftrightarrow \frac{\frac{r}{2}}{CM} = \frac{\frac{r\sqrt{5}}{4}}{\frac{5r}{4}} = \frac{\frac{3r}{4}}{EC}.$$

Rezultă că

$$[EC] = \frac{3r\sqrt{5}}{4} = 3 \cdot [AE].$$

Cum $[EA] \overset{(1)}{\equiv} [EB] \Rightarrow [BC] \equiv [BA]$.

Din relaţiile $BD \perp AC$ şi $[BC] \equiv [AB]$ rezultă că ΔADC este isoscel $\Rightarrow [CD]$ este simetricul segmentului $[AD]$ faţă de $[BD] \Rightarrow AD$ este cealaltă tangentă dusă din D la cercul $\mathcal{C}_1$.

b) Fie $\{F\} = AM \cap BD$. Cum CB şi CM sunt tangente la cercul $\mathcal{C}_1 \Rightarrow [CB] \equiv [CM] \equiv [BA] = 2 \cdot [EA] = 2 \cdot [MD]$.

Rezultă că AM împarte latura $[CD]$ în raportul $\frac{MD}{CM} = \frac{1}{2}$.

Paralela dusă prin B la AM taie pe CD în punctul N.

În ΔAMC, BN este linie mijlocie (deoarece $BN \| AM$ şi $[CB] \equiv [BA]$) $\Rightarrow [CN] \equiv [NM] = \frac{CM}{2} = [MD]$.

Din relaţiile $[NM] \equiv [MD]$ şi $FM \| BN \Rightarrow FM$ este linie mijlocie în $\Delta DBN \Rightarrow [BF] \equiv [FD] \Rightarrow AM$,,înjumătăţeşte" segmentul $[BD]$.

■