Nicolae Ioan-Andrei
clasa a VIII-a ICHB.

Problema 4

Fie mulțimea $M_k = \{x \in \mathbb{R}^* \mid \{x^k\} + \{\frac{1}{x^k}\} = 1\}$.

a) Să se arate că $M_1 \neq \emptyset$

b) Să se demonstreze că mulțimea M_{2015} este infinită.

Soluție: Ne vom folosi de următoarea afirmație:

Dacă $k \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ și $k + \frac{1}{k} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \{k\} + \{\frac{1}{k}\} = 1$. (*)

Demonstrație: $\left.\begin{array}{l}\{k\} + \{\frac{1}{k}\} = k + \frac{1}{k} - [k] - [\frac{1}{k}] \\ k + \frac{1}{k} \in \mathbb{Z}\end{array}\right\} \Rightarrow \{k\} + \{\frac{1}{k}\} \in \mathbb{Z}$ (1)

$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}0 \leq \{k\}, \{\frac{1}{k}\} < 1 \Rightarrow 0 \leq \{k\} + \{\frac{1}{k}\} < 2 \\ \text{din (1)}\end{array}\right\} \Rightarrow \{k\} + \{\frac{1}{k}\} \in \{0, 1\} \\ \text{dar } k \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \Rightarrow \{k\} > 0\end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \{k\} + \{\frac{1}{k}\} = 1$.

a) Din (*) $\Rightarrow$ este suficient să găsim $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $x + \frac{1}{x} = 3$.

$x + \frac{1}{x} = 3 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ este convenabil

$\Rightarrow \frac{3+\sqrt{5}}{2} \in M_1 \Rightarrow M_1 \neq \emptyset$.

b) Dacă avem $x \in \mathbb{R}^*$ a.î. $\{x\} + \{\frac{1}{x}\} = 1 \Rightarrow \left\{(\sqrt[2015]{x})^{2015}\right\} + \left\{\frac{1}{(\sqrt[2015]{x})^{2015}}\right\} = 1$

$\Rightarrow \sqrt[2015]{x} \in M_{2015} \Rightarrow$ este suficient să demonstrăm că $\{x\} + \{\frac{1}{x}\} = 1$ are o infinitate de soluții în $\mathbb{R}^*$.

$\Rightarrow$ (conform *) este suficient să găsim o infinitate de valori $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $x + \frac{1}{x} = k \geq 3$, $k \in \mathbb{Z}$

$x + \frac{1}{x} = k \Leftrightarrow x^2 - kx + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{k + \sqrt{k^2-4}}{2}$ verifică ecuația, $\forall k \geq 3$

Rămâne să verificăm că $\frac{k + \sqrt{k^2-4}}{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \Rightarrow$ este suficient ca $\sqrt{k^2-4} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$

adică $k^2 - 4 \neq$ pătrat perfect și $k^2 - 4 \geq 0$.

cum $k \geq 3 \Rightarrow k^2 - 4 > 0$.

Presupunem că $k^2 - 4 =$ pătrat perfect

Fie $k^2 - 4 = g^2$, $g \in \mathbb{N}$.

$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow (k-g)(k+g) = 4 \\ g \in \mathbb{N} \Rightarrow k - g \leq k + g \\ k+g,\ k-g \text{ au aceeași paritate} \\ k, g \in \mathbb{N} \Rightarrow k + g \in \mathbb{N}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}k - g = 2,\ k + g = 2 \Rightarrow k = 2, g = 0 \\ \text{dar } k \geq 3\end{array}\right\} \Rightarrow$ abs.

$\Rightarrow k^2 - 4 \neq$ pătrat perfect

$\Rightarrow M_{2015}$ infinită