Problema 2. Determinaţi numerele naturale a, b, c, d pentru care

$$abcd = a + b + c + d - 3.$$

* * *

Soluţie:
Dacă una din variabile este egală cu 0, atunci suma celorlalte trei trebuie să fie 3, deci celelalte trei numere pot fi: $0, 1, 2$ sau $1, 1, 1$ sau $0, 0, 3$.
Se obţin soluţiile:
$(0, 0, 1, 2)$, $(0, 0, 2, 1)$, $(0, 1, 0, 2)$, $(0, 2, 0, 1)$, $(0, 1, 2, 0)$, $(0, 2, 1, 0)$, $(1, 0, 0, 2)$, $(2, 0, 0, 1)$, $(1, 0, 2, 0)$, $(2, 0, 1, 0)$, $(1, 2, 0, 0)$, $(2, 1, 0, 0)$, $(0, 1, 1, 1)$, $(1, 0, 1, 1)$, $(1, 1, 0, 1)$, $(1, 1, 1, 0)$, $(0, 0, 0, 3)$, $(0, 0, 3, 0)$, $(0, 3, 0, 0)$ şi $(3, 0, 0, 0)$.
În continuare presupunem că a, b, c, d sunt nenule.
Dacă două dintre numere sunt egale cu 1, să zicem $c = d = 1$, atunci $ab = a+b-1$, adică $(a - 1)(b - 1) = 0$, ceea ce arată că şi un al treilea dintre numere trebuie să fie 1 (al patrulea poate fi orice număr natural). Obţinem soluţiile $(1, 1, 1, n)$, $(1, 1, n, 1)$, $(1, n, 1, 1)$ şi $(n, 1, 1, 1)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.
Vom arăta că nu există alte soluţii.
Dacă unul singur dintre numere este egal cu 1, să zicem $d = 1$, ajungem la $abc = a + b + c - 2$, cu $a, b, c \geq 2$. Atunci $abc > a + bc - 1 > a + b + c - 2$.
(Am folosit de două ori că dacă $x, y > 1$, atunci $xy > x + y - 1$, relaţie echivalentă cu $(x - 1)(y - 1) > 0$.)
Analog, dacă niciunul din numere nu este 1, atunci $abcd > ab + cd - 1 > (a + b - 1) + (c + d - 1) - 1 = a + b + c - 3$, deci nu avem egalitate.