Problema 4. Arătaţi că un număr natural, cu cel puţin două cifre, nu poate fi scris ca suma pătratelor cifrelor sale.

Cosmin Manea şi Dragoş Petrică, Piteşti

Soluţie: Presupunem că

$$\overline{a_1a_2a_3...a_n} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + ... + a_n^2.$$

cu $n \geq 2$, număr natural.

Cum $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ sunt cifre, avem

$$a_1^+ a_2^2 + a_3^2 + ... + a_n^2 \leq n \cdot 9^2 = 81n$$

Pe de altă parte

$$\overline{a_1a_2a_3...a_n} \geq 10^{n-1}$$

Din cele două relaţii obţinem

$$81n \geq 10^{n-1}$$

Ultima relaţie este adevărată numai pentru $n = 2$ sau $n = 3$.

Pentru $n = 2$ obţinem $\overline{ab} = a^2 + b^2$ din care rezultă

$$a(10 - a) = b(b - 1)$$

relaţie care nu este adevărată, oricare ar fi cifrele a şi b.

Pentru $n = 3$ obţinem $\overline{abc} = a^2 + b^2 + c^2$

Cum $a^2 + b^2 + c^2 \leq 243$ deducem că $a \in \{1, 2\}$.

Pentru $a = 2$ avem $\overline{2bc} = 4 + b^2 + c^2$ sau $\overline{2bc} \leq 166$ (imposibil).

Pentru $a = 1$ avem $\overline{1bc} = 1 + b^2 + c^2$.

Dacă $b \leq 7$ şi $c \leq 7$, atunci $\overline{1bc} \leq 99$ (imposibil).

Prin calcul se constată că pentru b sau c din mulţimea $\{8, 9\}$ relaţia $\overline{1bc} = 1 + b^2 + c^2$ nu se verifică.