Problema 4. În triunghiul ABC construim bisectoarea $[AD$ şi mediana $[AM]$, $D, M \in (BC)$. Dacă $\frac{A_{\Delta ADM}}{A_{\Delta ABC}} = \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N}^*$, aflaţi k pentru care $\frac{AC}{AB}$ este număr natural.

Elena Râmnicianu şi *Victor Săceanu*, Drobeta Turnu-Severin
Gazeta Matematică nr. 3/2011

Soluţie.Cum $\frac{AC}{AB}$ este număr natural, deducem că $AC \geqslant AB$, $D \in (BM)$ în condiţiile problemei. Notăm $AC = b, AB = c, \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c} = n \in \mathbb{N}$. Fie h_a lungimea înălţimii corespunzătoare laturii BC a triunghiului ABC. Atunci $\frac{A_{\Delta ADM}}{A_{\Delta ABC}} = \frac{h_a \cdot DM}{2} \cdot \frac{2}{h_a \cdot BC} = \frac{DM}{BC}$.

Din teorema bisectoarei $\frac{BD}{DC} = \frac{c}{b}$, de unde $\frac{BD}{BC} = \frac{c}{b+c}$. Cum $\frac{1}{k} = \frac{A_{\Delta ABC}}{A_{\Delta ADM}} = \frac{BC}{DM} = \frac{BC}{BM - BD}$, obţinem $\frac{1}{k} = \frac{BM}{BC} - \frac{BD}{BC} = \frac{1}{2} - \frac{c}{b+c} = \frac{b-c}{2(b+c)} = \frac{n-1}{2(n+1)}$. Prin urmare $k = \frac{2(n+1)}{n-1} \in \mathbb{N}^*$, de unde, punând condiţia ca numărul $\frac{2(n+1)}{n-1}$ să fie natural, obţinem $n \in \{2, 5\}$.