Funcţii hiperbolice - Câteva observaţii

lect.dr. Mihai Chiş
Facultatea de Matematică şi Informatică
Universitatea de Vest din Timişoara

Viitori Olimpici ediţia a 9-a, etapa a 2-a, clasa a XII-a

Definiţie 1. Funcţiile *sinus hiperbolic, cosinus hiperbolic, şi tangentă hiperbolică* sunt funcţiile $sh : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $ch : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, respectiv $th : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definite prin

$$sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad th(x) = \frac{sh(x)}{ch(x)} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}, \quad (\forall) x \in \mathbb{R}.$$

Observaţie 2. Imediat din definiţie rezultă că $sh(0) = 0$, $ch(0) = 1$, respectiv $th(0) = 0$, şi

$$sh(-x) = -sh(x), \quad ch(-x) = ch(x), \quad th(-x) = -th(x), \quad (\forall) x \in \mathbb{R},$$

astfel că funcţiile sh şi th sunt impare, iar ch este pară.

Observaţie 3. De asemenea, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ avem că

$$sh(x)ch(y) + ch(x)sh(y) = \frac{(e^x - e^{-x})(e^y + e^{-y}) + (e^x + e^{-x})(e^y - e^{-y})}{4} = \frac{e^{x+y} - e^{-x-y}}{2},$$

respectiv

$$ch(x)ch(y) + sh(x)sh(y) = \frac{(e^x + e^{-x})(e^y + e^{-y}) + (e^x - e^{-x})(e^y - e^{-y})}{4} = \frac{e^{x+y} + e^{-x-y}}{2}.$$

Deducem că

$$sh(x+y) = sh(x)ch(y) + ch(x)sh(y), \quad ch(x+y) = ch(x)ch(y) + sh(x)sh(y), \quad (\forall) x, y \in \mathbb{R},$$

de unde avem şi

$$th(x+y) = \frac{sh(x)ch(y) + ch(x)sh(y)}{ch(x)ch(y) + sh(x)sh(y)} = \frac{th(x) + th(y)}{1 + th(x)th(y)}, \ (\forall) x, y \in \mathbb{R}.$$

Folosind parităţile celor trei funcţii, înlocuind în identităţile de mai sus y cu $-y$, obţinem:

$$sh(x-y) = sh(x)ch(y) - ch(x)sh(y), \quad ch(x-y) = ch(x)ch(y) - sh(x)sh(y), \quad (\forall) x, y \in \mathbb{R},$$

respectiv

$$th(x-y) = \frac{th(x) - th(y)}{1 - th(x)th(y)}, \ (\forall) x, y \in \mathbb{R}.$$

Observaţie 4. În particular, pentru orice $t \in \mathbb{R}$ avem că $ch^2(t) - sh^2(t) = ch(t-t) = ch(0) = 1$, astfel că punctul P_t de coordonate $(ch(t), sh(t))$ se află pentru orice $t \in \mathbb{R}$ pe hiperbola de ecuaţie $x^2 - y^2 = 1$, şi cum $ch(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \geq 1 > 0$, punctul P_t se află pe ramura hiperbolei care se găseşte în semiplanul de ecuaţie $x > 0$.

Observaţie 5. Ca funcţii elementare, funcţiile hiperbolice sunt continue şi indefinit derivabile, cu

$$sh'(x) = ch(x)\,, \quad ch'(x) = sh(x)\,, \quad th'(x) = \frac{1}{ch^2(x)} = 1 - th^2(x)\,, \quad (\forall) x \in \mathbb{R}.$$

Deoarece $ch(x) > 0$, $(\forall)x \in \mathbb{R}$, rezultă că sh este o funcţie strict crescătoare. Cum $\lim\limits_{x\to-\infty} sh(x) = -\infty$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} sh(x) = \infty$, obţinem atunci că sh este o funcţie bijectivă.
Din monotonia funcţiei sh avem că $sh(x) < 0$, $(\forall)x < 0$, respectiv $sh(x) > 0$, $(\forall)x > 0$, şi rezultă că ch este strict descrescătoare pe $(-\infty, 0]$, respectiv strict crescătoare pe $[0, \infty)$. Cum $\lim\limits_{x\to-\infty} ch(x) = \infty = \lim\limits_{x\to\infty} ch(x)$, şi $1 = ch(0) = min_{x\in\mathbb{R}} ch(x)$, deducem că $Im(ch) = [1, \infty)$, iar restricţiile

$$ch_- : (-\infty, 0] \longrightarrow [1, \infty)\,, \quad ch_-(x) = ch(x), (\forall)x \leq 0,$$

şi

$$ch_+ : [0, \infty) \longrightarrow [1, \infty)\,, \quad ch_+(x) = ch(x), (\forall)x \geq 0$$

sunt bijective.
Evident, $|sh(x)| < ch(x)$, $(\forall)x \in \mathbb{R}$, astfel că $|th(x)| < 1$, $(\forall)x \in \mathbb{R}$. Cum $th'(x) > 0$, $(\forall)x \in \mathbb{R}$, funcţia th este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$, şi $\lim\limits_{x\to-\infty} th(x) = -1$, $\lim\limits_{x\to\infty} th(x) = 1$, astfel că corestricţia $th : \mathbb{R} \longrightarrow (-1, 1)$ este bijectivă.

Observaţie 6. Pentru orice $y \in \mathbb{R}$, ecuaţia $sh(x) = y$ se scrie echivalent

$$e^x - e^{-x} = 2y \iff (e^x)^2 - 2ye^x - 1 = 0 \iff e^x = y + \sqrt{y^2+1} \iff x = ln(y + \sqrt{y^2+1}).$$

Rezultă că inversa funcţiei sh este funcţia $arcsh : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definită prin

$$arcsh(y) = ln(y + \sqrt{y^2+1}).$$

Observaţie 7. Pentru orice $y \geq 1$, ecuaţiile $ch_-(x) = y$, respectiv $ch_+(x) = y$, se scriu echivalent

$$e^x + e^{-x} = 2y,\ x \leq 0 \iff (e^x)^2 - 2ye^x + 1 = 0,\ x \leq 0 \iff e^x = y - \sqrt{y^2-1} \iff x = ln(y - \sqrt{y^2-1}),$$

respectiv

$$e^x + e^{-x} = 2y,\ x \geq 0 \iff (e^x)^2 - 2ye^x + 1 = 0,\ x \geq 0 \iff e^x = y + \sqrt{y^2-1} \iff x = ln(y + \sqrt{y^2-1}).$$

Funcţiile bijective $ch_- : (-\infty, 0] \longrightarrow [1, \infty)$ şi $ch_+ : [0, \infty) \longrightarrow [1, \infty)$ au atunci inversele $arcch_- : [1, \infty) \longrightarrow (-\infty, 0]$, respectiv $arcch_+ : [1, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$, definite prin

$$arcch_-(y) = ln(y - \sqrt{y^2-1}),\ (\forall)y \geq 1,$$

respectiv

$$arcch_+(y) = ln(y + \sqrt{y^2-1}),\ (\forall)y \geq 1.$$

Observaţie 8. Pentru orice $y \in (-1, 1)$, ecuaţia $th(x) = y$ se scrie echivalent

$$\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = y \Longleftrightarrow e^{2x} = \frac{1+y}{1-y} \Longleftrightarrow x = \frac{1}{2} ln \frac{1+y}{1-y}.$$

Funcţia bijectivă $th : \mathbb{R} \longrightarrow (-1, 1)$ are atunci inversa $arcth : (-1, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$ definită prin $arcth(y) = \frac{1}{2} ln \frac{1+y}{1-y}$.

Observaţie 9. Pentru derivatele funcţiilor inverse ale funcţiilor hiperbolice avem:

$$arcsh'(y) = \frac{1}{sh'(arcsh(y))} = \frac{1}{ch(arcsh(y))} = \frac{1}{\sqrt{1 + sh^2(arcsh(y))}} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}, (\forall) y \in \mathbb{R}.$$

$$arcch'_-(y) = \frac{1}{ch'(arcch_-(y))} = \frac{1}{sh(arcch_-(y))} = -\frac{1}{\sqrt{ch^2(arcch_-(y)) - 1}} = -\frac{1}{\sqrt{y^2-1}}, (\forall) y > 1.$$

$$arcch'_+(y) = \frac{1}{ch'(arcch_+(y))} = \frac{1}{sh(arcch_+(y))} = \frac{1}{\sqrt{ch^2(arcch_+(y)) - 1}} = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}, (\forall) y > 1.$$

$$arcth'(y) = \frac{1}{th'(arcth(y))} = \frac{1}{1 - th^2(arcth(y))} = \frac{1}{1-y^2}, (\forall) y \in (-1, 1).$$

Observaţie 10. Din cele de mai sus rezultă atunci următoarele:

1)

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} dy = arcsh(y) + \mathcal{C} = ln(y + \sqrt{y^2+1}) + \mathcal{C}.$$

2) Pentru $y \in (1, \infty)$,

$$\int \frac{1}{\sqrt{y^2-1}} dy = arcch_+(y) + \mathcal{C} = ln(y + \sqrt{y^2-1}) + \mathcal{C} = ln|y + \sqrt{y^2-1}| + \mathcal{C}.$$

3) Pentru $y \in (-\infty, -1)$,

$$\int \frac{1}{\sqrt{y^2-1}} dy = \int -\frac{1}{\sqrt{(-y)^2-1}} d(-y) = arcch_-(-y) + \mathcal{C} = ln(-y - \sqrt{y^2-1}) + \mathcal{C} = ln|y + \sqrt{y^2-1}| + \mathcal{C}.$$

Rezumând 2) şi 3),

$$\int \frac{1}{\sqrt{y^2-1}} dy = ln|y + \sqrt{y^2-1}| + \mathcal{C}$$

pentru $y \in (-\infty, -1)$ sau $y \in (1, \infty)$.

4) Pentru $y \in (-1, 1)$,

$$\int \frac{1}{1-y^2} dy = arcth(y) + \mathcal{C} = \frac{1}{2} ln \frac{1+y}{1-y} + \mathcal{C}.$$

5) Pentru $y \in (-\infty, -1)$ sau $y \in (1, \infty)$,

$$\int \frac{1}{y^2-1} dy = \int \frac{\frac{1}{y^2}}{1 - \frac{1}{y^2}} dy = -\int \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{y}\right)^2} d\left(\frac{1}{y}\right) = -arcth\left(\frac{1}{y}\right) + \mathcal{C} = -\frac{1}{2} ln \frac{1 + \frac{1}{y}}{1 - \frac{1}{y}} + \mathcal{C} = \frac{1}{2} ln \frac{y-1}{y+1} + \mathcal{C}.$$

Rezumând 4) şi 5),

$$\int \frac{1}{y^2-1}\,dy = \frac{1}{2} ln \left| \frac{y-1}{y+1} \right| + \mathcal{C}$$

pentru $y \in (-\infty, -1)$, $y \in (-1, 1)$ sau $y \in (1, \infty)$.

Observaţie 11. Ţinând cont de identitatea

$$th(x+y) = \frac{th(x)+th(y)}{1+th(x)th(y)}, \quad (\forall) x, y \in \mathbb{R},$$

rezultă că mulţimea $G = (-1, 1)$ înzestrată cu operaţia binară $u * v = \frac{u+v}{1+uv}$, $(\forall) u, v \in (-1, 1)$, are o structură de grup abelian, izomorf cu $(\mathbb{R}, +)$, via izomorfismul

$$th : (\mathbb{R}, +) \longrightarrow (G, *) .$$