Problema 1
Etapa 2
Clasa a VII-a

Problema 1. Fie $k \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că ecuaţia

$$| x - 1 | + | x - k | + | x - k^2 | = k^2$$

are exact două soluţii reale.

Luminiţa Popescu

Soluţie

Dacă $k = 1$, atunci ecuaţia devine $3 \mid x - 1 \mid = 1$, care are soluţiile $x = \frac{4}{3}$ şi $x = \frac{2}{3}$.

Fie $k \geq 2$.

Pentru $x \geq k^2$, ecuaţia devine $x - 1 + x - k + x - k^2 = k^2$, deci $2k^2 + k + 1 = 3x \geq 3k^2$, adică $k + 1 \geq k^2$. Relaţia este imposibilă pentru $k \geq 2$ deoarece $k^2 = k \cdot k \geq 2k > k + 1$.

Pentru $x < 1$, ecuaţia devine $1 - x + k - x + k^2 - x = k^2$, deci $k + 1 = 3x < 3$, adică $k < 2$, ceea ce este imposibil.

Pentru $x = 1$, avem $k - 1 + k^2 - 1 = k^2$, adică $k = 2$. Cu alte cuvinte, $x = 1$ este soluţie pentru $k = 2$.

Dacă $1 < x < k^2$, ecuaţia devine $x - 1 + | x - k | + k^2 - x = k^2$, deci $| x - k | = 1$, care are soluţiile $x = k + 1$ şi $x = k - 1$. În plus $1 < k - 1 < k + 1 < k^2$, pentru $k > 2$. Dar dacă $k = 2$, atunci $x = k - 1 = 1$, ceea ce nu convine.

Deci, în toate cazurile, am obţinut exact două soluţii reale.