Problema 4.

Se dă expresia $E(a,b,c)=\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}$, $a,b,c\in(0,\infty)$.

Să se demonstreze că $1<E(a,b,c)<2$, pentru orice valori strict pozitive luate de a,b,c.

Este adevărat că pentru orice număr $\sim$ aflat între 1 şi 2, vom găsi valori pentru a,b,c astfel încât $E(a,b,c)=\sim$?

Soluţie. Avem evident $E(a,b,c)>\frac{a+b+c}{a+b+c}=1;\forall a,b,c>0$ şi

$E(a,b,c)=3-\frac{b}{a+b}-\frac{c}{b+c}-\frac{a}{a+c}<2;\forall a,b,c>0$. Deci $1<E(a,b,c)<2;\forall a,b,c>0$.

În plus avem $E(1,x,x^2)=\frac{x^3+3x^2+2}{x^3+x^2+x+1};\forall x>0$. Fie acum $\sim\in(1,2)$ şi $E(1,x,x^2)=\sim$.

Efectuând calculele, obţinem $(\sim-1)x^3+(\sim-3)x^2+\sim x+\sim-2=0$. Observăm că dacă x este ales extrem de aproape de 0 iar mai apoi foarte mare (tinzând către infinit), membrul stâng al ecuaţiei anterioare este negativ, respectiv pozitiv deci există o anumită valoare pentru x astfle încât să fie verificată egalitatea anterioară.