Problema 1. Fie numărul $A = 10^{3n+1} + 4$. Arătaţi că:

a) pentru orice $n \in \mathbb{N}$ par, numărul A se divide cu 7;

b) pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ par, numărul A are cel puţin 12 divizori.

$* * *$

Soluţie: a) Putem scrie

$$A = 10^{3n+1} + 4 = 10^{3n} \cdot 10 + 4 = (10^3)^n \cdot 10 + 4 = 1000^n \cdot 10 + 4 = (1001 - 1)^n \cdot 10 + 4$$

Cum 1001 este multiplu de 7 avem

$$A = (\mathcal{M}7 - 1)^n \cdot 10 + 4 = \mathcal{M}7 + (-1)^n \cdot 10 + 4$$

Deoarece n este număr par avem $(-1)^n = 1$ şi atunci

$$A = \mathcal{M}7 + 10 + 4 = \mathcal{M}7 + 14 = \mathcal{M}7$$

În concluzie A se divide cu 7.

b) Dacă n este număr natural nenul atunci $10^{3n+1} \geq 100$ şi rezultă A se divide cu 4.

De aici şi din a) avem

$$A = 2^2 \cdot 7 \cdot P$$

Dacă P este număr prim atunci numărul divizorilor lui A este

$$(2+1)(1+1)(1+1)=12$$

Dacă P este număr compus atunci numărul divizorilor lui A este mai mare ca 12.

În concluzie A are cel puţin 12 divizori.