Clasa a 11-a

Problema 1. Funcţia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este continuă pe $[a, b]$, derivabilă pe (a, b) şi $f(a) = f(b)$. Arătaţi că, pentru orice $\alpha > 0$, există c_1, $c_2 \in (a, b)$, $c_1 \neq c_2$, astfel încât $\alpha f'(c_1) + f'(c_2) = 0$.

Gazeta Matematică nr. 5/2021 (*Ovidiu Pop*, Satu Mare)

Soluţie. Fie $c \in (a, b)$ astfel încât $\dfrac{c-a}{b-c} = \alpha$; mai exact, $c = \dfrac{a + \alpha b}{1+\alpha}$.
....**3p**

Aplicând teorema lui Lagrange funcţiei f pe intervalele $[a, c]$, respectiv $[c, b]$, rezultă că există $c_1 \in (a, c)$ şi $c_2 \in (c, b)$ astfel încât

$$f'(c_1) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}, \quad \text{respectiv} \quad f'(c_2) = \frac{f(b) - f(c)}{b - c}.$$

....**2p**

Având în vedere alegerea lui c şi ipoteza $f(a) = f(b)$, obţinem

$$f'(c_2) = \alpha \cdot \frac{f(a) - f(c)}{c - a} = -\alpha f'(c_1),$$

deci $\alpha f'(c_1) + f'(c_2) = 0$ **2p**