COMENTARII ETAPA JUDEŢEANĂ 2012

Abstract. Personal comments on some of the problems presented at the District Round of the National Mathematics Olympiad 2012.
Data: 12 martie 2012.
Autor: Dan Schwarz, Bucureşti.

1. Introducere

Aceste comentarii asupra Etapei Judeţene a Olimpiadei de Matematică 2012, reflectă, ca de obicei, opinia personală a autorului. Ele sunt adăugate la o prezentare selectată a probelor de concurs.[1]

Voi indica prin culoarea roşie eventualele erori, sau notaţiile abuzive din enunţurile originale, şi prin culoarea verde varianta de preferat (sau care lipsea din enunţ sau soluţie). Voi folosi în mod predilect şi culoarea albastră pentru comentariile de natură personală.

Numele autorilor problemelor sunt ţinute subt obroc până la publicarea **RMC 2012**, din motive nu cu totul clare, nici justificate.

2. Clasa a V-a

Subiectul (2)**.**

a) Care puteri ale numărului 2 *se scriu cu patru cifre (în baza* 10*)?*

b) Fie n un număr natural nenul. Arătaţi că există cel puţin trei puteri ale lui 2 *care se scriu cu n cifre (în baza* 10*).*

Soluţie. Soluţia oficială conţine o greşeală de tipar când din $10^n < 2^{p+1}$ deduce $5 \cdot 10^{n-1} < 2^n$ desigur, era intenţionat a se scrie $5 \cdot 10^{n-1} < 2^p$.

Continuarea este standard, arătând că pentru orice n există cel puţin trei numere puteri ale lui 2 care se scriu cu n cifre, anume – unul pentru care prima cifră este 1, un al doilea pentru care prima cifră este din $\{2, 3\}$, şi un al treilea pentru care prima cifră este din $\{4, 5, 6, 7\}$. □

Este evident, pe de altă parte, că nu pot exista cinci puteri ale lui 2 care se scriu cu n cifre (în baza 10), prin urmare numărul puterilor lui 2 care se scriu cu acelaşi număr de cifre este trei sau patru. Se poate arăta, prin metode mult mai avansate decât cele disponibile la clasa a V-a, că pentru orice număr natural N există infinit de multe puteri ale lui 2 ale căror scriere în baza 10 începe cu cifrele lui N. Atunci, luând $N = 10$, vom avea patru puteri ale lui 2 care se scriu cu acelaşi număr de cifre, iar luând $N = 19$, vom avea doar trei puteri ale lui 2 care se scriu cu acelaşi număr de cifre.

[1] Lipsesc unele probleme, la care nu am găsit interesul de a fi prezentate.

Subiectul (4)**.** *Într-o cutie se află* 36 *de bile numerotate de la* 1 *la* 36*. Ion încearcă să elimine bilele din cutie, în etape. Fiecare etapă constă în următoarea succesiune de operaţii:*

- *Ion extrage la întâmplare patru bile din urnă.*
- *Ion elimină câte două bile dintre cele patru dacă diferenţa numerelor înscrise pe acestea se divide cu* 3*.*
- *Ion reintroduce în urnă bilele care nu au fost eliminate.*

a) Arătaţi că, în fiecare etapă, Ion poate elimina cel puţin două bile.

b) Arătaţi că, dacă în cutie rămân numai patru bile, atunci Ion le poate elimina pe toate.

Soluţie. (Singurul Ion pe care îl cunosc, care s-ar angaja într-o astfel de antrepriză, este Ion Cicu!) Dar cuvintele **cutie** şi **urnă** nu sunt, în general, interschimbabile în limba română.

Considerând mulţimile $\{1, 4, \ldots, 34\}$, $\{2, 5, \ldots, 35\}$ şi $\{3, 6, \ldots, 36\}$, din principiul cutiei se obţine că măcar două dintre bilele extrase vor fi fost numerotate cu numere din aceeaşi mulţime, drept urmare măcar două bile pot fi eliminate. În fiecare etapă numărul elementelor fiecăreia dintre cele trei mulţimi rămâne la fel, sau scade cu doi sau cu patru; în total numărul elementelor lor scăzând cu doi sau cu patru. Atunci, din considerente de paritate, ultimele patru bile rămase poartă numere care se află sau în aceeaşi mulţime, sau două într-una şi două într-alta, şi atunci toate patru pot fi eliminate. □

3. Clasa a VI-a

Subiectul (2)**.** *Pentru fiecare număr natural n notăm cu $s(n)$ suma cifrelor sale. Fie a un număr natural cu* 2012 *cifre, care este divizibil cu* 9*. Arătaţi că numărul $s(s(s(a)))$ este pătrat perfect.*

Gazeta Matematică

Soluţie. Se foloseşte faptul că n şi $s(n)$ dau acelaşi rest la împărţirea prin 9, deci a, $s(a)$, $s(s(a))$ şi $s(s(s(a)))$ sunt toate divizibile cu 9. Dar atunci $s(a)$ este cel mult $9 \cdot 2012 < 18999$; atunci $s(s(a))$ este cel mult $9 \cdot 4 = 36$, şi fiind divizibil cu 9 aparţine deci mulţimii $\{9, 18, 27, 36\}$; prin urmare se obţine $s(s(s(a))) = 9 = 3^2$. □

Cerinţa de a arăta că acel număr este pătrat perfect, când singura metodă este de a-l încolţi până ce cedează în a mărturisi că are valoarea $9 = 3^2$, este una dintre acelea pe care le critic de mult timp – nu era mai onorabil în a cere să se calculeze $s(s(s(a)))$?

Subiectul (4)**.** *O mulţime A de numere naturale nenule se numeşte primară dacă diferenţa oricăror două elemente ale sale este divizibilă cu* 3 *sau cu* 5*.*

a) Daţi un exemplu de o mulţime primară cu 4 *elemente, care conţine elementele numerele* 2 *şi* 2012*.*

b) Arătaţi că suma elementelor unei mulţimi primare cu 15 *elemente este multiplu de* 3 *sau de* 5.

Soluţie.
a) Exemplul $A = \{2, 12, 22, 2012\}$ din soluţia oficială se bazează pe faptul că numerele 2 şi 2012 dau ambele restul 2 la împărţirea prin 5; putem deci lua $A = \{2, 2012, 5m + 2, 5n + 2\}$ pentru numere întregi arbitrare m şi n, care să lase mulţimea A să fie formată din 4 elemente. Deoarece numerele 2 şi 2012 dau ambele restul 2 şi la împărţirea prin 3, puteam la fel de bine lua $A = \{2, 2012, 3m + 2, 3n + 2\}$ pentru numere întregi arbitrare m şi n, care să lase mulţimea A să fie formată din 4 elemente.

b) Soluţia oficială conţine greşeala de limbă fie $a < b < c$ sunt trei elemente desigur, trebuie zis fie $a < b < c$ trei elemente.

Fiecărui element $a \in A$ îi asociem perechea (t_a, c_a) a resturilor sale la împărţirea cu trei, respectiv cinci. Condiţia ca mulţimea A să fie primară se citeşte acum prin faptul că oricare două perechi trebuie să coincidă pe prima sau a doua poziţie (sau ambele). Fie $a \in A$. Dacă $t_b = t_a$ pentru toate elementele $b \in A$, am terminat. Dacă nu, există $b \in A$ astfel încât $t_b \neq t_a$, ceea ce necesită $c_b = c_a$. Fie acum orice alt element $x \in A$. Dacă $c_x \neq c_a$, acest lucru ar necesita $t_a = t_x = t_b$, absurd.

Prin urmare, într-o mulţime primară A, toate elementele trebuie să dea acelaşi rest la împărţirea cu trei, sau la împărţirea cu cinci (sau la ambele). Când A are 15 elemente, acest rest comun se adună de 15 ori în suma elementelor lui A, deci această sumă se divide cu 3 sau cu 5. $\square$

4. Clasa a VII-a

Subiectul (1)**.** *Se consideră numerele naturale impare* $a_1, a_2, \ldots, a_{2012}$.

Demonstraţi că numărul $A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{2012}^2 - 1}$ *este iraţional.*

Gazeta Matematică

Soluţie. Baremul oferă doar 1 punct pentru afirmaţia că A este raţional dacă şi numai dacă expresia de sub radical este pătrat perfect (probabil fără a cere şi demonstrarea acestui fapt, care este mult, dar mult mai complexă decât ceea ce urmează), şi 2 puncte pentru demonstrarea faptului că pătratul unui număr impar este de forma $4k + 1$ (ceea ce este complet trivial).

Acum, faptul că anul curent 2012 este un multiplu de 4 vine să completeze soluţia, expresia de sub radical fiind de forma $4m - 1$, nu pătrat perfect. $\square$

Subiectul (2)**.** *Se consideră numerele reale strict pozitive* a, b *şi* c *cu proprietatea că* $a^2 + ab + ac - bc = 0$.

a) Arătaţi că dacă două dintre numerele a, b *şi* c *sunt egale, atunci cel puţin unul dintre cele trei numere este iraţional.*

b) Arătaţi că există o infinitate de triplete de numere naturale nenule (m, n, p) *cu proprietatea că* $m^2 + mn + mp - np = 0$.

Soluţie.

a) Dacă am avea a egal cu b sau c, aceasta conduce la $2a^2 = 0$, absurd, deci considerăm $b = c$. Atunci $a^2 + 2ab - b^2 = 0$, deci $(a + b)^2 = 2b^2$, de unde $a = (\sqrt{2} - 1)b$. Dacă b este raţional, atunci a rezultă iraţional.

b) Soluţia oficială caută triplete $(m, n, p) = (m, um, vm)$, pentru care relaţia se scrie $1 + u + v - uv = 0$, sau $(u - 1)(v - 1) = 2$. Cum aceasta are soluţia $u = 2$, $v = 3$, se obţine familia infinită de triplete $(m, 2m, 3m)$, pentru $m \in \mathbb{N}^*$. □

Se poate pune problema de a rezolva total ecuaţia $m^2 + mn + mp - np = 0$ în numere naturale nenule. O soluţie parametrică aproape completă (greu de ajuns la ea) este $m = duv$, $n = du(u + v)$, $p = dv(u + 2v)$. Subfamilia de mai sus se obţine pentru $u = v = 1$.

Subiectul (4)**.** *Se consideră pătratul $ABCD$ şi punctul E pe latura AB. Dreapta DE intersectează dreapta BC în punctul F, iar dreapta CE intersectează dreapta AF în punctul G. Demonstraţi că dreptele BG şi DF sunt perpendiculare.*

Soluţie. Soluţia oficială este metrică, dar se poate transforma într-o soluţie sintetică; ingredientul principal este teorema lui Menelaus. □

Această problemă se găseşte postată pe site-ul AoPS `www.mathlinks.ro` din data de 2 ianuarie 2012, fără a i se indica provenienţa, şi primeşte soluţii, una sintetică şi una proiectivă.

Celelalte probleme au fost rezolvate "în masă", cel puţin în Bucureşti. Un singur concurent a obţinut punctaj maxim 7 pe această problemă; în rest, trei punctaje de 4, iar celelalte aproape de zero. Aşadar clasamentul primilor 20 concurenţi a fost decis aproape în totalitate de rezultatele la această problemă – ea disproporţionat de grea, celelalte disproporţionat de uşoare.

5. Clasa a VIII-a

Subiectul (1)**.** *Fie a şi b două numere reale strict pozitive diferite, cu proprietatea că numerele $a - \sqrt{ab}$ şi $b - \sqrt{ab}$ sunt raţionale. Arătaţi că numerele a şi b sunt raţionale.*

Gazeta Matematică

Soluţie. Avem $(a - \sqrt{ab})\sqrt{b} + (b - \sqrt{ab})\sqrt{a} = 0$, de unde $\sqrt{b} = r\sqrt{a}$ pentru un număr raţional $r \neq 1$ strict pozitiv. Dar avem şi $b - a = (b - \sqrt{ab}) - (a - \sqrt{ab})$ număr raţional, deci $(r^2 - 1)a$ este raţional. Prin urmare a este raţional, şi cum $b = r^2 a$, b este şi el raţional. □

Subiectul (3)**.** *Fie numerele reale strict pozitive a, b, c. Determinaţi cel mai mare număr întreg n cu proprietatea că, pentru orice $x \in [0, 1]$,*

$$\frac{1}{ax + b + c} + \frac{1}{a + bx + c} + \frac{1}{a + b + cx} \geq \frac{n}{a + b + c}.$$

Soluţie. Desigur, $0 < rx + s + t \leq r + s + t$, pentru orice numere reale strict pozitive r, s, t şi $x \in [0, 1]$. Notând expresia din membrul stâng cu $E(x)$, rezultă că $E(x) \geq E(1) = \dfrac{3}{a + b + c}$, deci $n = 3$.

Încă un caz de orbire din partea celor care au scris soluţia oficială, care apelează la inegalitatea dintre mediile armonică şi aritmetică a trei numere reale strict pozitive! $\square$

Soluţia aceasta a fost găsită instantaneu de către mine, şi, independent şi la fel de repede, de Ion Cicu. Unul dintre elevii care au dat-o în concurs a fost răsplătit cu 2 puncte din 7; să sperăm că justiţia va fi restabilită la contestaţii.

6. Încheiere

Ce pot spune? Nu sunt prea mulţumit de calitatea problemelor şi/sau soluţiilor propuse. Îngrijorătoare este prevalenţa ridicată a erorilor de limbă, sau notaţie. Lucrările nu au fost prea bine balansate; în general nivelul de dificultate nu a fost prea ridicat, dar e timp pentru lucrări mai grele la Olimpiada Naţională! Mult succes celor calificaţi!