SOLUŢIE

Problema 3

Să se determine funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$f\left(f\left(f(x)+y\right)+y\right)=4f(x)+6y, \qquad (1)$$

pentru orice $x, y\in\mathbb{R}$.

Vasile Pop

Soluție. Făcând $x=0$ în (1), obținem

$$f\left(f\left(f(0)+y\right)+y\right)=4f(0)+6y, \qquad (2)$$

pentru orice $y\in\mathbb{R}$.

Considerăm funcțiile $g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(y)=4f(0)+6y$ și $h(y)=f\left(f(0)+y\right)+y$. Relația (2) devine $f\circ h=g$ și cum g este funcție surjectivă, rezultă că f este surjectivă.

Făcând $y=-f(x)$ în (1), obținem $f\left(f(0)-f(x)\right)=-2f(x)$, pentru orice $y\in\mathbb{R}$. Notăm $t=f(0)-f(x)$. Cum f este surjectivă deducem că t parcurge $\mathbb{R}$ atunci când x parcurge $\mathbb{R}$, astfel că $f(t)=2t-2f(0)$, pentru orice $t\in\mathbb{R}$.

Făcând $t=0$, obținem $f(0)=0$ și atunci $f(t)=2t$, pentru orice $t\in\mathbb{R}$. Observăm că această funcție verifică relația din ipoteză.

În concluzie, singura funcție cu proprietatea din ipoteză este $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x$.