Problema 2. Demonstraţi că, pentru orice numere reale x, y, z şi orice numere pozitive a, b, c, are loc dubla inegalitate

$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c} \geq \frac{1}{3}\left(\frac{(2x+y)^2}{2a+b}+\frac{(2y+z)^2}{2b+c}+\frac{(2z+x)^2}{2c+a}\right) \geq \frac{(x+y+z)^2}{a+b+c}.$$

Când au loc egalităţile în cele două inegalităţi?

Soluţie:

Conform inegalităţii din materialul teoretic, avem $\frac{x^2}{a}+\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b} \geq \frac{(2x+y)^2}{2a+b}$, $\frac{y^2}{b}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c} \geq \frac{(2y+z)^2}{2b+c}$ şi $\frac{z^2}{c}+\frac{z^2}{c}+\frac{x^2}{a} \geq \frac{(2z+x)^2}{2c+a}$. Adunându-le şi împărţind cu 3 obţinem inegalitatea din stânga.

Egalitatea are loc atunci când $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$.

Tot conform inegalităţii prezentate în materialul teoretic,

$$\frac{(2x+y)^2}{2a+b}+\frac{(2y+z)^2}{2b+c}+\frac{(2z+x)^2}{2c+a} \geq \frac{\big((2x+y)+(2y+z)+(2z+x)\big)^2}{(2a+b)+(2b+c)+(2c+a)}=\frac{9(x+y+z)^2}{3(a+b+c)},$$

de unde, împărţind cu 3, obţinem inegalitatea din dreapta.

Egalitate avem dacă $\frac{2x+y}{2a+b}=\frac{2y+z}{2b+c}=\frac{2z+x}{2c+a}$.

Dacă notăm cu k valoarea comună a acestor fracţii, avem $2x+y=k(2a+b)$, $2y+z=k(2b+c)$, $2z+x=k(2c+a)$ care, adunate, implică $3(x+y+z)=3k(a+b+c)$, adică $x+y+z=k(a+b+c)$. Scăzând prima egalitate din ultima obţinută, avem $z-x=k(c-a)$. Aceasta, adunată cu $2z+x=k(2c+a)$ implică $z=kc$. Analog se obţine că $x=ka$ şi $y=kb$, adică egalitatea are loc dacă $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$.