Avem două cutii cu pietricele. Una conţine p pietricele, cealaltă q pietricele. Avem voie să facem următoarele două feluri de mutări: putem fie să scoatem câte o pietricică din fiecare cutie, fie să triplăm numărul de pietricele dintr-una din cutii.
a) Putem goli ambele cutii după o succesiune de mutări din cele două feluri dacă $p = 100$, $q = 200$? Dar dacă $p = 101$, $q = 200$?
b) Determinaţi perechile (p, q) de numere naturale nenule pentru care cele două cutii pot fi golite printr-o succesiune de mutări.

Concursul KöMaL, prelucrare

Soluţia 1.
a) Dacă $p = 100$, $q = 200$, cutiile pot fi golite astfel: mai întâi, de 50 de ori, scoatem câte o pietricică din ambele cutii. Ajungem la 50 de pietricele în prima cutie, 150 în cea de-a doua. Triplăm acum numărul de pietricele din prima cutie astfel încât vom avea câte 150 de pietricele în fiecare cutie. În fine, de 150 de ori, scoatem câte o pietricică din fiecare cutie golind astfel cele două cutii.
Dacă $p = 101$, $q = 200$ cutiile nu pot fi golite pentru că iniţial, numărul de pietricele din cele două cutii sunt două numere de paritate diferită (101 şi 200). Dacă la un moment dat, parităţile numerelor care reprezintă pietricelele din cele două cutii sunt diferite, atunci şi după efectuarea unei mutări parităţile vor rămâne diferite. Într-adevăr: dacă scoatem câte o pietricică din fiecare cutie schimbăm ambele parităţi, deci vom rămâne cu o cutie cu un număr par de pietricele şi cu cealaltă având un număr impar de pietricele; dacă triplăm numărul de pietricele dintr-o cutie nu modificăm paritatea numărului de pietre din niciuna din cutii, deci vom rămâne iarăşi cu o cutie cu un număr par de pietricele şi cu cealaltă având un număr impar de pietricele. Deoarece acest fapt rămâne invariant pe parcursul efectuării diverselor mutări, nu putem ajunge la situaţia în care ambele cutii să fie goale pentru că asta ar presupune că am putea ajunge să avem un număr par de pietricele (0 şi 0) în cele două cutii.
b) Argumentul de mai sus este valabil pentru orice pereche (p, q) de numere naturale nenule având parităţi diferite. Aşadar aceste perechi nu convin. Rămâne să studiem perechile (p, q) de numere naturale nenule având aceeaşi paritate. Vom arăta că în toate aceste situaţii putem goli cutiile. Putem presupune $p \leq q$. Dacă $p = q$ este evident că putem goli cutiile din p mutări din primul tip. Dacă $0 < p < q$, încercăm să facem în cazul general ceea ce am făcut în cazul $p = 100$, $q = 200$. Ar trebui să găsim un x astfel încât $3(p - x) = q - x$. Atunci, scoţând mai întâi câte x pietricele din fiecare cutie, triplând pietricelele din prima cutie, ajungem la câte $q - x$ pietricele în fiecare cutie, pietricele pe care le putem scoate din $q - x$ mutări.
Ecuaţia de mai sus are soluţia $x = \dfrac{3p - q}{2}$. Cum $3p$ şi q au aceeaşi paritate, evident x este număr întreg. În plus, dacă $p \leq q$ atunci $x \leq p$, deci chiar putem scoate x pietricele din cele două cutii. Există însă o problemă: este posibil ca $x < 0$ dacă $3p < q$. Pentru a surmonta această problemă, mai întâi triplăm de $n \geq 0$ ori numărul de pietricele din cutia cu p pietricele până când avem în prima cutie

$p' = 3^n p$ pietricele, cu $3^n p < q \leq 3^{n+1} p$. Acum putem scoate un anumit număr, $x \geq 0$, de pietricele din cele două cutii (repetând de x ori prima mutare), astfel încât în a doua cutie să rămână de trei ori mai multe pietricele decât în prima, adică astfel încât să avem

$$3(p' - x) = q - x.$$

Din ecuaţia de mai sus obţinem $x = \dfrac{3p' - q}{2} \in \mathbb{N}$. În plus, $x < p'$, deci operaţia de scoatere a câte unei pietricele din cele două cutii chiar poate fi repetată de x ori. Acum triplăm numărul de pietricele din prima cutie (care nu este goală). Obţinem câte $q - x$ pietricele în cele două cutii. Repetând de $q - x$ ori primul tip de mutare reuşim să golim cutiile.

Soluţia 2.

Ca mai sus se arată că dacă p, q au parităţi diferite atunci nu putem goli cutiile. Dacă p, q au aceeaşi paritate, cu $p \leq q$, scoate câte $p - 1$ pietricele din fiecare cutie şi ajungem la $(1,\, q - p + 1)$. Dacă $q - p + 1 = 1$ terminăm scoţând câte o pietricică din fiecare cutie, dacă nu, triplăm pietricelele din prima cutie, ajungând la $(3, q - p + 1)$. Scoatem de două ori câte o pietricică şi ajungem la $(1, q - p - 1)$. Dacă $q - p - 1 = 1$, scoatem câte o pietricică, dacă nu, triplăm şi scoatem câte două ajungând la $(1,\, q - p - 3)$, ş.a.m.d., până când $q - p - (2k + 1)$ devine 1. Atunci scoatem câte o pietricică şi am terminat.