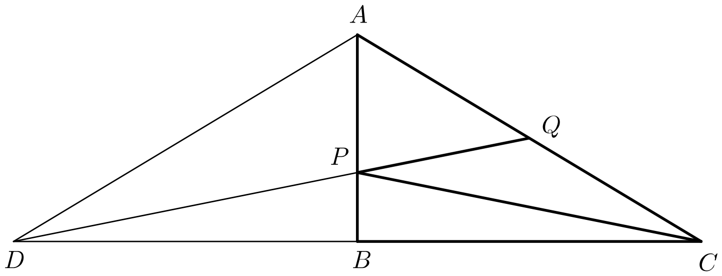
Pe latura $[AB]$ a triunghiului ABC se consideră un punct P astfel încât $AP = 2PB$. Se ştie că $CP = 2PQ$, unde Q este mijlocul lui $[AC]$. Demonstraţi că triunghiul ABC este dreptunghic.

Turneul Oraşelor, 2011

Soluţia 1: Fie D simetricul lui C faţă de B. Atunci, în triunghiul ADC, $[AB]$ este mediană şi, cum $AP = 2PB$, P este centrul de greutate al triunghiului ADC. Rezultă că punctul P se găseşte şi pe mediana $[DQ]$, adică punctele D, P, Q sunt coliniare. În plus, $DP = 2PQ = CP$, deci triunghiul PDC este isoscel, prin urmare mediana $[PB]$ este şi înălţime, adică unghiul B al triunghiului ABC este drept.



Soluţia 2: Fie R simetricul lui P faţă de B. Atunci $PR = 2PB = AP$, deci P este mijlocul lui $[AR]$. Rezultă că PQ este linie mijlocie în triunghiul ARC, deci $RC = 2PQ = PC$. Deducem că triunghiul PCR este isoscel, deci mediana $[CB]$ este şi înălţime, adică $m(\sphericalangle ABC) = 90°$.