Clasa a X-a - Etapa 5

Problema 3. *Fie* $n, k \in \mathbb{N}^*$, *cu proprietatea* $k < n$. *Determinaţi numărul de perechi* $(x, y) \in \{1, 2, 3, ..., n\} \times \{1, 2, 3, ..., n\}$ *în fiecare dintre următoarele cazuri:*

a) $|x - y| = k$;

b) $|x - y| \leq k$.

Soluţie.

a) Presupunem $x > y$. Atunci avem $x - y = k$, deci $x = y + k$. Din $x \leq n$, deducem $y + k \leq n$, deci $y \in \{1, 2, ..., n - k\}$. În acest caz vor fi $n - k$ variante. Eliminând condiţia $x > y$, vom avea $2(n - k)$ perechi.

b) Numărul total de cazuri este reprezentat de suma situaţiilor $|x - y| = l$, unde $l \in \{0, 1, 2, ..., k\}$. Pentru $l = 0$ avem n perechi, iar în rest $2(n - l)$ perechi. Numărul total este

$$N = n + \sum_{l=1}^{k} 2(n - l) = n + 2nk - k(k + 1).$$