Etapa 6, Problema 3

Fie paralelipipedul dreptunghic $ABCDEFGH$ şi M un punct interior. Fie a,b,c măsurile unghiurilor formate de AM cu AB, AD, AE. Demonstrați că

$$AM < AB\cos a + AD\cos b + AE\cos c < AG.$$

Soluţie sintetică.

Fie $N = pr_{AB}M$; atunci $\cos a = \frac{NA}{AM}$. Analog, dacă $P = pr_{AD}M$ şi $Q = pr_{AE}M$, atunci $\cos b = \frac{AP}{AM}$ şi $\cos c = \frac{AQ}{AM}$. Atunci

$$AN\cos a + AP\cos b + AQ\cos c = \frac{AN^2}{AM} + \frac{AP^2}{AM} + \frac{AQ^2}{AM} = \frac{AM^2}{AM} = AM,$$

deoarece AM este diagonala paralelipipedului dreptunghic care se formează cu muchiile AN, AP, AQ. Avem apoi

$$AM = AN\cos a + AP\cos b + AQ\cos c < AB\cos a + AD\cos b + AE\cos c.$$

Din inegalitatea lui Cauchy,

$$AB\cos a + AD\cos b + AE\cos c < \sqrt{AB^2 + AD^2 + AE^2}\sqrt{\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c}.$$

Întrucât $AB^2 + AD^2 + AE^2 = AG^2$ şi $\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c = 1$, problema este rezolvată.

Soluţie vectorială.

Evident că $\triangle AMG$ este obtuzunghic în M, deci $AG^2 > AM^2 + MG^2$. Scriem această relație sub forma $AM^2 < \frac{AM^2 + AG^2 - MG^2}{2}$ şi deducem că $AM^2 < \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AG}$ (*).

Dar $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AG} < AM \cdot AG$ (**) şi

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AM}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}\right) = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AE}$$
$$= AM \cdot AB\cos A + AM \cdot AD\cos b + AM \cdot AE\cos c.$$

Din (*) şi (**) obținem inegalitatea

$$AM^2 < AM \cdot AB\cos A + AM \cdot AD\cos b + AM \cdot AE\cos c < AM \cdot AG$$

şi concluzia problemei urmează după simplificarea cu AM.■