Fie E şi respectiv F mijloacele laturilor $[BC]$ şi $[CD]$ ale unui patrulater convex $ABCD$. Segmentele $[AE]$, $[AF]$ şi $[EF]$ împart $ABCD$ în patru triunghiuri ale căror arii sunt patru numere naturale consecutive.
Aflaţi aria maximă a triunghiului BAD.

Turneul Oraşelor, 2002

Soluţie. Fie n, $n+1$, $n+2$, $n+3$ ariile celor patru triunghiuri determinate de segmentele $[AE]$, $[AF]$ şi $[EF]$. Deoarece E şi F sunt mijloace, avem $S[ABE] = S[ACE]$ şi $S[ACF] = S[ADF]$, de unde $S[AECF] = S[ACE] + S[ACF] = \frac{1}{2}S[ABC] + \frac{1}{2}S[ACD] = \frac{1}{2}S[ABCD] = \frac{n+n+1+n+2+n+3}{2} = 2n+3$.
În plus, triunghiurile ΔCEF şi ΔCBD sunt asemenea, raportul de asemănare fiind $\frac{1}{2}$, de unde $S[CEF] = \frac{1}{4}S[CBD] < \frac{1}{4}S[ABCD] = \frac{4n+6}{4}$. Deducem că $S[CEF] \in \{n,\ n+1\}$. Distingem două cazuri:
1. Dacă $S[CEF] = n$ atunci, din asemănarea de mai sus, $S[CBD] = 4n$, de unde $S[BAD] = S[ABCD] - S[CBD] = 4n+6-4n = 6$.
2. Dacă $S[CEF] = n+1$ atunci $S[CBD] = 4(n+1)$, de unde rezultă că $S[BAD] = S[ABCD] - S[CBD] = 4n+6-4n-4 = 2$.
Aşadar, în aparenţă aria maximă căutată este $\max\{2,\ 6\} = 6$. Însă concluzia este pripită atâta timp cât nu am demonstrat că primul caz este într-adevăr posibil. Acest lucru se poate vedea făcând efectiv construcţia unui patrulater $ABCD$ pentru care $S[BAD] = 6$. Iată construcţia:
Observăm că ar trebui să construim un patrulater $AECF$ astfel ca $S[CEF] = n$, $S[AEF] = n+3$, $S[AEC] = n+1$ şi $S[AFC] = n+2$. Apoi punctele B, D vor fi simetricele lui C faţă de E, respectiv F. Dacă notăm $\{O\} = AC \cap EF$, trebuie ca $\frac{AO}{CO} = \frac{n+3}{n}$ şi $\frac{EO}{FO} = \frac{n+1}{n+2}$. O să construim chiar un patrulater ortodiagonal cu aceste proprietăţi. Considerăm două drepte perpendiculare care se taie într-un punct O. Pe prima dreaptă considerăm punctele A şi C astfel ca $O \in (AC)$, $AO = (n+3)x$, $CO = nx$, cu x ce va fi ales convenabil în cele ce urmează. Pe cealaltă dreaptă considerăm punctele E şi F astfel ca $O \in (EF)$, $EO = (n+1)x$ şi $FO = (n+2)x$. Un calcul simplu arată că pentru a obţine ariile dorite trebuie să alegem $x = \sqrt{\frac{2}{2n+3}}$. Aşadar se poate construi un patrulater $ABCD$ în care ariile triunghiurilor CEF, ABE, ADF, AEF sunt patru numere naturale consecutive şi $S[BAD] = 6$, prin urmare valoarea 6 chiar se poate obţine şi, după cum am văzut mai sus, această valoare este cea mai mare valoare posibilă.