Problema 1.

Arătați că nu există numere întregi a,b,c astfel încât $\left(a+b\sqrt{3}\,\mathrm{i}\right)^{17}=c+\sqrt{3}\,\mathrm{i}$.

***

Soluție.

Folosind formula binomului lui Newton, obținem
$\left(C_{17}^{0}a^{17}-3C_{17}^{2}a^{15}b^{2}+\ldots+3^{8}C_{17}^{16}ab^{16}\right)+\left(C_{17}^{1}a^{16}b-3C_{17}^{3}a^{14}b^{3}+\ldots+3^{8}b^{17}\right)\cdot i\sqrt{3}=c+i\sqrt{3}$,
de unde $\left(C_{17}^{1}a^{16}-3C_{17}^{3}a^{14}b^{2}+\ldots-3^{7}C_{17}^{15}a^{2}b^{14}+3^{8}b^{16}\right)\cdot b=1$, deci $b=\pm1$. Dacă $b=1$, cum C_{17}^{k} se divide cu 17, pentru orice $k\in\{1,2,\ldots,16\}$, rezultă $3^{8}-1$ se divide cu 17, fals. Deci $b=-1$.

Similar, dacă $a\neq\pm1$, deducem că a^{2} divide $3^{8}+1=2\cdot17\cdot193$, fals. Dacă $a=1$, avem $\left(1-i\sqrt{3}\right)^{17}=c+i\sqrt{3}$, de unde folosind scrierea trigonometrică, obținem $2^{17}\sin\dfrac{85\pi}{3}=\sqrt{3}$, adică $\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2^{17}}$, absurd.

La fel se elimină cazul când $a=-1$.