Problema 1. Fie S mulţimea numerelor mai mari ca 10 care au numai cifre din mulţimea $\{1, 3, 7, 9\}$. (Cifrele se pot şi repeta.) Arătaţi că orice element al lui S are un factor prim mai mare ca 10.

Olimpiada Iberoamericană, 1999

Soluţie:
Evident, niciun număr din S nu este divizibil nici cu 2, nici cu 5. Să demonstrăm că nu este posibil ca singurii factori primi ai unui număr din S să fie 3 şi/sau 7. Atunci va rezulta că orice număr din S are un factor prim mai mare ca 10.
Observaţia esenţială este că orice număr de forma $3^k \cdot 7^j$, $k, j \in \mathbb{N}$, are penultima cifră pară, deci nu aparţine lui S. Afirmaţia precedentă revine la a arăta că numerele de forma $3^k \cdot 7^j$ dau unul din resturile $1, 3, 7, 9$ la împărţirea cu 20. Să observăm că dacă înmulţim două numere de forma $20k + r$ cu $r \in \{1, 3, 7, 9\}$, obţinem tot un număr de această formă. Într-adevăr, $(20k_1 + r_1)(20k_2 + r_2) = 400k_1k_2 + 20k_1r_2 + 20k_2r_1 + r_1r_2 = 20(20k_1k_2 + k_1r_2 + k_2r_1) + r_1r_2$. Ne convingem uşor că produsul oricărora două dintre numerele $1, 3, 7, 9$, nu neapărat diferite, are penultima cifră pară (sau inexistentă), adică este un număr de forma $20k + r$, cu $r \in \{1, 3, 7, 9\}$. Cu aceasta, afirmaţia este probată.