Problema 2. Demonstraţi că pentru orice numere reale pozitive a, b are loc inegalitatea

$$\left(a^2+b+\frac{3}{4}\right)\left(b^2+a+\frac{3}{4}\right) \geq \left(2a+\frac{1}{2}\right)\left(2b+\frac{1}{2}\right).$$

Olimpiadă Belarus, 2005

Soluţia 1: Vom demonstra că

$$\left(a^2+b+\frac{3}{4}\right)\left(b^2+a+\frac{3}{4}\right) \overset{(1)}{\geq} \left(a^2+a+\frac{3}{4}\right)\left(b^2+b+\frac{3}{4}\right) \overset{(2)}{\geq} \left(2a+\frac{1}{2}\right)\left(2b+\frac{1}{2}\right).$$

Să justificăm inegalităţile (1) şi (2). Inegalitatea (1) revine, după desfacerea parantezelor şi reducerea termenilor asemenea, la $a^3+b^3 \geq a^2b+ab^2$ care se mai scrie $(a-b)(a^2-b^2) \geq 0$ sau $(a-b)^2(a+b) \geq 0$, adevărată pentru orice $a, b \geq 0$ (cu egalitate dacă $a=b$).

Inegalitatea (2) se obţine înmulţind inegalităţile $a^2+a+\frac{3}{4} \geq 2a+\frac{1}{2} > 0$ şi $b^2+b+\frac{3}{4} \geq 2b+\frac{1}{2}$. Ele revin la $a^2-a+\frac{1}{4} \geq 0$, respectiv $b^2-b+\frac{1}{4} \geq 0$, adică $\left(a-\frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$ şi $\left(b-\frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$. În aceste inegalităţi avem egalitate dacă $a=b=\frac{1}{2}$.

Soluţia 2: Vom demonstra că

$$\left(a^2+b+\frac{3}{4}\right)\left(b^2+a+\frac{3}{4}\right) \overset{(3)}{\geq} \left(a+b+\frac{1}{2}\right)^2 \overset{(4)}{\geq} \left(2a+\frac{1}{2}\right)\left(2b+\frac{1}{2}\right).$$

Să justificăm inegalităţile (3) şi (4).

Ca mai sus, avem $a^2-a+\frac{1}{4} \geq 0$, inegalitate care arată că $a^2+\frac{1}{4} \geq a$, deci $a^2+b+\frac{3}{4} \geq a+b+\frac{1}{2} > 0$. Analog se obţine că $b^2+a+\frac{3}{4} \geq a+b+\frac{1}{2} > 0$. Înmulţind aceste două inegalităţi se obţine inegalitatea (3).

Inegalitatea (4) revine, după desfacerea parantezelor, la $a^2+b^2 \geq 2ab$, adică la $(a-b)^2 \geq 0$, inegalitate evidentă. Alternativ, ea se poate deduce scriind inegalitatea dintre media geometrică şi cea aritmetică pentru numerele $2a+\frac{1}{2}$ şi $2b+\frac{1}{2}$.