SOLUŢIE

Problema 3

Fie $A \subseteq \mathbb{C}$ o mulţime cu proprietăţile:

i) $|z| = 1 \Rightarrow z \in A$; ii) $\forall z_1, z_2 \in A \Rightarrow z_1 + z_2 \in A$.

Să se arate că $A = \mathbb{C}$.

Marcel Ţena, ONM 1986

Soluţie. Vom lucra în planul complex înzestrat cu reperul xOy.

Arătăm mai întâi că discul unitate $D_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant 1\}$ este inclus în mulţimea A. Evident $-1 \in A$ şi $1 \in A$, deci $0 = -1+1 \in A$. Deoarece cercul unitate $\mathcal{C}(O, 1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ este inclus în A, mai rămâne să dovedim că punctele interioare acestui cerc aparţin lui A.

Fie $z \in \mathbb{C}$ cu $0 < |z| < 1$. Notăm cu M imaginea geometrică a lui z şi fie N mijlocul segmentului $[OM]$. Perpendiculara în N pe OM intersectează $\mathcal{C}(O, 1)$ în punctele $N_1(z_1)$ şi $N_2(z_2)$. Rezultă $z_1, z_2 \in A$ şi conform ipotezei ii) avem $z_1 + z_2 \in A$. Dar patrulaterul ON_1MN_2 este romb, deci $z_1 + z_2 = z$ şi obţinem $z \in A$.

Demonstrăm prin inducţie că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, discul cu centrul în origine şi rază 2^n, adică $D_{2^n} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant 2^n\}$ este inclus în A. Pentru $n = 0$ avem $D_{2^0} = D_1 \subset A$. Presupunem că $D_{2^n} \subset A$ şi demonstrăm că $D_{2^{n+1}} \subset A$. Într-adevăr, pentru orice $z \in D_{2^{n+1}}$ avem $\dfrac{z}{2} \in D_{2^n}$, deci $z = \dfrac{z}{2} + \dfrac{z}{2} \in A$.

Deoarece $\mathbb{C} = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} D_{2^n}$, rezultă $\mathbb{C} \subset A$, adică $\mathbb{C} = A$.