Clasa a VII-a

Problema 2. Se consideră numerele $1+\sqrt{2}$, $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ şi $2+\sqrt{3}$. Dupa un pas, fiecare număr se înlocuieşte cu media armonică a celorlalte numere.

a) Este posibil ca, după un anumit număr de paşi, numerele obţinute să fie $2+\sqrt{2}$, $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ şi $1+\sqrt{3}$?

b) Este posibil ca, după un anumit număr de paşi, numerele obţinute să fie 2, 3 şi 6?

Gazeta Matematică 2021

Prima soluție:

a) Fie a_n, b_n, c_n numerele după n paşi şi $S_n = \dfrac{1}{a_n} + \dfrac{1}{b_n} + \dfrac{1}{c_n}$. Avem $S_{n+1} = S_n = \ldots = S_0 = 1$ **2p**

Cum $\dfrac{1}{2+\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dfrac{1}{1+\sqrt{3}} \neq 1$, rezultă că nu putem avea la un moment dat numerele $2+\sqrt{2}, \sqrt{2}+\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}$ **2p**

b) Presupunem că din a, b, c, putem obţine $2, 3, 6$.

Atunci $2 = \dfrac{2}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \Rightarrow \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} \in \mathbb{Q}$. La fel, $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{c} \in \mathbb{Q}$ şi $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} \in \mathbb{Q}$. Se obţine, astfel, că $a, b, c \in Q$.

Procedăm similar pentru numerele din care se obţin a, b, c, ş.a.m.d. Rezultă că la început, toate numerele sunt raţionale – contradicţie **3p**

A doua soluție:

a) Dacă $a_n < b_n < c_n$ sunt numerele după n pași, atunci mediile armonice $a_{n+1},\ b_{n+1},\ c_{n+1}$sunt cuprinse între a_n și c_n **1p**

După primul pas obținem numerele $1+\sqrt{3} < 1+\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} < 2+\sqrt{2}$, iar $1+\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} \neq \sqrt{2}+\sqrt{3}$ **1p**

Apoi obținem numere mai mari decât $1+\sqrt{3}$ și mai mici decât $2+\sqrt{2}$ deci nu putem obține numerele cerute **2p**

b) Din raționamentul de la a) reiese că obținem doar numere cuprinse între $1+\sqrt{2}$ și $2+\sqrt{3}$, deci nu-l putem obține pe 6 .... **3p**

Observație. În enunțul primit în concurs, la întrebarea a), în locul numerelor $2+\sqrt{2},\ \sqrt{2}+\sqrt{3},\ 1+\sqrt{3}$ au apărut tot numerele $1+\sqrt{2},\ \sqrt{2}+\sqrt{3},\ 2+\sqrt{3}$. În cazul în care un concurent spune că răspunsul este afirmativ, deoarece numerele cerute se obțin după 0 pași, sau spune că răspunsul este negativ, argumentând acest lucru(de exemplu, cu un raționament de tipul celui din soluția II), va lua **4p** pentru această parte a problemei.