

## CONCURSUL VIITORI OLIMPICI 2010 - 2017

MIHAI MONEA, GABRIEL POPA

**INTRODUCERE.** Faza finală a Concursului *Gazeta Matematică și Viitori Olimpici*, găzduit în ultimii ani de frumosul oraș Câmpulung Muscel, adună în a doua jumătate a lunii august pe cei care, de-a lungul unui an școlar, se dovedesc a fi buni rezolvatori ai problemelor publicate pe site-ul ViitoriOlimpici.ro, precum și în *Gazeta Matematică*. În tabără, acești elevi au de rezolvat trei probleme, una fiind selectată dintre cele publicate pe site și alta din ultimele numere ale *Gazetei*. În plus, concurenții susțin o probă orală.

Prezentăm în continuare subiectele propuse participanților la cele opt ediții precedente. Urăm succes actualilor concurenți, în confruntarea cu problemele ediției a noua!

## 1. EDIȚIA I -17 AUGUST 2010

**Problema 1.** Arătați că orice submulțime cu  $7n + 1$  elemente a mulțimii  $\{1, 2, \dots, 8n\}$  conține patru numere  $a, b, c$  și  $d$  astfel încât  $a|b$ ,  $b|c$  și  $c|d$ .

*Soluție.* Considerăm submulțimile mulțimii  $\{1, 2, \dots, 8n\}$  de forma

$$C_k = \{2k - 1, 2(2k - 1), 2^2(2k - 1), \dots\},$$

unde  $k \in \{1, 2, 3, \dots, 4n\}$ . Submulțimile  $C_{2n+1}, C_{2n+3}, \dots, C_{4n}$  conțin câte un singur element. În total, aceste  $2n$  submulțimi au  $2n$  elemente. Submulțimile  $C_{n+1}, C_{n+2}, \dots, C_{2n}$  conțin câte două elemente, deci, în total, aceste  $n$  submulțimi au  $2n$  elemente.

Rămân  $3n + 1$  elemente în submulțimile  $C_1, C_2, \dots, C_n$ , ceea ce înseamnă, conform principiului cutiei, că măcar una dintre aceste mulțimi conține patru elemente. În acest moment, concluzia se impune.  $\square$

**Problema 2.** Pe o tablă  $2n \times 2n$  se află pietre albe și pietre roșii, cel mult o piatră în fiecare pătrat  $1 \times 1$ . Se execută următoarele operații:

- (i) de pe fiecare coloană pe care se află o piatră albă se elimină toate pietrele roșii;
- (ii) de pe fiecare linie pe care a rămas o piatră roșie se elimină toate pietrele albe.

Arătați că dintr-una dintre culori au rămas cel mult  $n^2$  pietre.

OLIMPIADĂ RUSIA

*Soluție.* După executarea celor două operații, rămân doar linii și coloane monoculare. Fie  $l_a$  numărul de linii albe (adică cele care conțin doar pietre albe),  $l_r$  numărul de linii roșii,  $c_a$  numărul de coloane albe și  $c_r$  numărul de coloane roșii. Numărul de pietre albe poate fi, în final, cel mult  $l_a \cdot c_a$ , iar cel de pietre roșii cel mult  $l_r \cdot c_r$ . Este suficient să arătăm că  $l_a \cdot c_a \leq n^2$  sau  $l_r \cdot c_r \leq n^2$ .

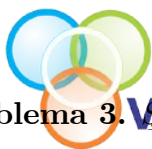
Dacă  $l_a + c_a \leq 2n$ , atunci

$$l_a \cdot c_a \leq l_a(2n - l_a) = n^2 - (n - l_a)^2 \leq n^2.$$

Dacă  $l_a + c_a > 2n$ , rezultă că

$$l_r + c_r = 4n - (l_a + c_a) \leq 2n$$

și, ca mai sus,  $l_r \cdot c_r \leq n^2$ .  $\square$



**Problema 3.** Șirul de numere naturale  $(x_n)_{n \geq 0}$  este definit prin  $x_0 = x_1 = 1$  și

$$x_{n+1} = 14x_n - x_{n-1},$$

pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ . Demonstrați că, pentru fiecare număr natural  $n$ , numărul  $2x_n - 1$  este pătrat perfect.

VIITORIOOLIMPICI.RO

*Soluție.* Soluțiile ecuației caracteristice sunt  $t_{1,2} = (2 \pm \sqrt{3})^2$ . Termenul general al șirului are forma  $x_n = c_1 t_1^n + c_2 t_2^n$  și, ținând seama de condiția  $x_0 = x_1 = 1$ , obținem

$$x_n = \frac{1}{4} \left( (2 + \sqrt{3})^{2n-1} + (2 - \sqrt{3})^{2n-1} \right).$$

Dar  $2 \pm \sqrt{3} = \frac{1}{2} (\sqrt{3} \pm 1)^2$ , deci vom avea

$$\begin{aligned} 2x_n - 1 &= \frac{1}{2^{2n}} \left( (\sqrt{3} + 1)^{4n-2} + (\sqrt{3} - 1)^{4n-2} \right) - 1 \\ &= \left( \frac{(1 + \sqrt{3})^{2n-1} + (1 - \sqrt{3})^{2n-1}}{2^n} \right)^2. \end{aligned}$$

Rămâne de arătat că numărul din paranteza este natural. Evident că acest număr este rațional, iar divizibilitatea cu  $2^n$  se dovedește, de exemplu, prin inducție, folosind faptul că expresia de la numărător, fie ea  $a_{2n-1}$ , satisface relația de recurență  $a_n - 2a_{n-1} - 2a_{n-2} = 0$ .  $\square$

## 2. EDIȚIA A II-A - 19 AUGUST 2011

**Problema 1.** Fie numerele reale  $a_1, a_2, a_3$  și numerele complexe nenule  $z_1, z_2, z_3$  astfel încât  $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$  și

$$\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1} = 1.$$

Determinați valorile posibile ale numărului  $|a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3|$ .

VIITORIOOLIMPICI.RO

*Soluție.* Avem că

$$z_1^2 z_3 + z_2^2 z_1 + z_3^2 z_2 = z_1 z_2 z_3.$$

Prin conjugarea relației  $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1} = 1$ , obținem că  $\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} + \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_3} + \frac{\bar{z}_3}{\bar{z}_1} = 1$ , de unde  $\frac{z_2}{z_1} + \frac{z_3}{z_2} + \frac{z_1}{z_3} = 1$ , adică

$$z_3^2 z_1 + z_1^2 z_2 + z_2^2 z_3 = z_1 z_2 z_3.$$

Din aceste două egalități deducem că  $\sum z_1^2 z_3 - z_3^2 z_1 = 0$ , prin urmare

$$(z_1 - z_2)(z_2 - z_3)(z_3 - z_1) = 0.$$

Rezultă că sunt posibile doar următoarele trei situații:

- 1)  $z_1 = z_2 \Rightarrow z_1^2 + z_3^2 = 0 \Rightarrow z_3 = \pm iz_1 \Rightarrow |a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3| = \sqrt{(a_1 + a_2)^2 + a_3^2}$ ;
- 2)  $z_2 = z_3 \Rightarrow z_1^2 + z_3^2 = 0 \Rightarrow z_1 = \pm iz_3 \Rightarrow |a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3| = \sqrt{(a_3 + a_2)^2 + a_1^2}$ ;
- 3)  $z_1 = z_3 \Rightarrow z_1^2 + z_2^2 = 0 \Rightarrow z_2 = \pm iz_1 \Rightarrow |a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3| = \sqrt{(a_3 + a_1)^2 + a_2^2}$ .

 $\square$



**Problema 2.** Se consideră  $n \geq 3$  puncte, oricare trei necoliniare. Se trasează  $C_{n-1}^2 + 1$  segmente având capetele în puncte dintre cele considerate. Arătați că oricare două puncte pot fi unite printr-o linie poligonală formată din segmente trasate.

MARIUS PERIANU

*Soluție.* Presupunem prin absurd ca există două puncte  $A$  și  $B$  care nu pot fi unite printr-o linie poligonală formată din segmentele trasate. Notăm cu  $V(A)$  mulțimea punctelor care pot fi unite prin linii poligonale cu  $A$  (inclusiv punctul  $A$ ) și fie  $k = |V(A)|$  numărul de vârfuri. Deoarece  $B \notin V(A)$ , rezultă  $k \leq n - 1$ .

Arătăm că celelalte  $n - k$  puncte nu sunt unite prin segmente cu puncte din  $V(A)$ . Într-adevăr, dacă  $C \in V(A)$ ,  $D \notin V(A)$  și punctele  $C, D$  sunt unite printr-un segment, atunci o linie poligonală de la  $A$  la  $C$  se poate prelungi la o linie poligonală de la  $A$  la  $D$ , contradicție cu  $D \notin V(A)$ .

Astfel, numărul segmentelor netrasate (numărul perechilor de puncte între care nu s-a trasat un segment) este  $N \geq k(n - k) \geq n - 1$ , iar al celor trasate este  $C_{n-1}^2 + 1$ .

În total, am avea cel puțin  $n - 1 + C_{n-1}^2 + 1 = n - 1 + \frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1 = C_n^2 + 1$  segmente, ceea ce este fals, deoarece între  $n$  puncte se pot trasa  $C_n^2$  segmente.  $\square$

**Problema 3.** Fie  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ , și  $a_1 = 1 < a_2 < \dots < a_{\varphi(n)}$  toate numerele relativ prime cu  $n$ , mai mici decât  $n$ . Arătați că numerele  $a_1, a_2, \dots, a_{\varphi(n)}$  sunt în progresie aritmetică dacă și numai dacă  $n$  este 6 sau număr prim sau o putere a lui 2.

LAURENȚIU PANAITOPOL

*Soluție.* Dacă  $n \in \{6\} \cup \{2^k \mid k \in \mathbb{N}^*\}$  sau este număr prim, atunci  $a_1, a_2, \dots, a_{\varphi(n)}$  sunt în progresie aritmetică.

Reciproc, dacă  $a_1, a_2, \dots, a_{\varphi(n)}$  sunt în progresie aritmetică, atunci:

a) dacă  $\varphi(n) = 1$ , atunci  $n = 2$ , iar dacă  $\varphi(n) = 2$ , atunci  $n = 3, 4, 6$ ;

b) dacă  $\varphi(n) \geq 3$ , avem situațiile:

• dacă  $a_2 = 2$ , atunci  $n$  este prim;

• dacă  $a_2 = 3$ , atunci  $a_k = 2k - 1$ ,  $k = 1, \varphi(n)$ , de unde rezultă că  $n$  este o putere a lui 2;

• dacă  $a_2 \geq 4$ , atunci, deoarece  $a_2 > 3$ , rezultă  $3 \mid n$  și  $3 \nmid a_2$ . Dar  $a_3 = 2a_2 - a_1 = 2a_2 - 1$ ,

și cum  $3 \nmid a_3$ , rezultă  $a_2 \equiv 1 \pmod{3}$ .

Dar  $n - 1 = a_{\varphi(n)} = a_1 + (\varphi(n) - 1)(a_2 - a_1) = 1 + (\varphi(n) - 1)(a_2 - 1)$ , deci  $n = 2 + (\varphi(n) - 1)(a_2 - 1)$ . De aici, cum  $a_2 \equiv 1 \pmod{3}$ , rezultă că  $n \equiv 2 \pmod{3}$ , fals, întrucât  $3 \mid n$ .  $\square$

### 3. EDIȚIA A III-A - 22 AUGUST 2012

**Problema 1.** Spunem că un număr complex  $z$  are proprietatea  $P$  dacă există  $m_z, n_z$  numere naturale, nu ambele nule, astfel încât

$$z^{m_z} = (1 + z)^{n_z} = 1.$$

a) Determinați numerele complexe cu proprietatea  $P$ ;

b) Pentru fiecare  $z$  cu proprietatea  $P$ , determinați perechile  $(m_z, n_z)$  corespunzătoare pentru care  $m_z + n_z = 2012$ .

VIITORIOLIMPICI.RO

*Soluție.* a) Fie  $\zeta_n = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$  rădăcina primitivă de ordin  $n$  a unității. Elementele mulțimilor  $A_n = \{\zeta_n - 1, \zeta_n^2 - 1, \dots, \zeta_n^{n-1} - 1\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$  au proprietatea  $P$  (luăm  $m_z = 0$ ). De asemenea,



$$B_m = \{1, \zeta_m, \zeta_m^2, \dots, \zeta_m^{m-1}\} \setminus \{-1\},$$

$m \in \mathbb{N}, m \geq 2$  au proprietatea P (luăm  $n_z = 0$ ).

În cazul în care  $m_z, n_z$  sunt ambele nenule, atunci  $z \in C(O, 1) \cap C(M, 1)$ , unde  $M$  este punctul de afix  $-1$ , prin urmare  $z \in \{\zeta_3, \zeta_3^2\}$ . În concluzie, numerele complexe care au proprietatea P sunt cele din

$$\left( \bigcup_{n=2}^{\infty} A_n \right) \cup \left( \bigcup_{m=2}^{\infty} B_m \right).$$

b) Dacă  $n \geq 2$  este divizor al lui 2012 și  $z \in A_n$ , atunci  $(m_z, n_z) = (0, 2012)$ ; pentru celelalte elemente din  $\bigcup_{n=2}^{\infty} A_n$  nu există perechi  $(m_z, n_z)$  cu proprietatea cerută. La fel, dacă  $m \geq 2$  este divizor al lui 2012 și  $z \in B_m$ , atunci  $(m_z, n_z) = (2012, 0)$ ; pentru celelalte elemente din  $\bigcup_{m=2}^{\infty} B_m$  nu există perechi  $(m_z, n_z)$  cu proprietatea cerută.

Dacă  $z \in \{\zeta_3, \zeta_3^2\}$ , nu există perechi  $(m_z, n_z)$  cu ambele componente nenule: suma  $m_z + n_z$  se divide cu 3, în timp ce 2012 nu se divide cu 3.  $\square$

**Problema 2.** Fie  $ABCD$  un pătrat de centru  $O$ . Dacă  $P \in [AD]$ , demonstrați că există punctele  $M \in [AB]$  și  $N \in [BC]$  astfel încât  $O$  este ortocentrul triunghiului  $MNP$  dacă și numai dacă  $3AP \geq 2AD$ .

GABRIEL POPA & PAUL GEORGESCU

*Soluție.* Raportăm planul la un reper cartezian astfel încât

$$O(0, 0); A(-1, -1); B(1, -1); C(1, 1); D(-1, 1).$$

Fie  $M(a, -1), N(1, b), P(-1, c)$  puncte cu proprietatea că  $O$  este ortocentrul triunghiului  $MNP$ . Din  $OP \perp MN$  și  $OM \perp PN$  rezultă că  $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{MN} = 0$ , respectiv  $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{PN} = 0$ . Cum  $\overrightarrow{OP}(-1, c), \overrightarrow{MN}(1-a, b+1)$ , obținem că  $a-1+bc+c=0$ , respectiv  $2a-b+c=0$ . Eliminând  $a$  între cele două relații, deducem că  $2-c=b(2c+1)$ .

Situația  $c = -\frac{1}{2}$  conduce la o contradicție, deci putem scrie  $b = \frac{2-c}{2c+1}$ . Impunem condiția  $-1 \leq b \leq 1$  și rezultă că  $c \in [\frac{1}{3}, 1]$ , prin urmare  $3AP \geq 2AD$ .

Reciproc, să presupunem că  $3AP \geq 2AD$ , adică  $c \in [\frac{1}{3}, 1]$ . Atunci  $b = \frac{2-c}{2c+1} \in [-1, 1]$ , iar  $a = \frac{b-c}{2} = \frac{1-c-c^2}{2c+1} \in [-1, 1]$ , după cum se constată ușor. Punctele  $M\left(\frac{1-c-c^2}{2c+1}, -1\right)$  și  $N\left(1, \frac{2-c}{2c+1}\right)$  completează un triunghi  $MNP$  al cărui ortocentru este  $O$ .  $\square$

**Problema 3.** Demonstrați că nu există funcții  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  pentru care să fie îndeplinite, simultan, condițiile:

(i)  $f(1) = 1$ ;

(ii) există  $M > 0$  astfel încât  $-M \leq f(x) \leq M, \forall x \in \mathbb{R}$ ;

(iii)  $f\left(x + \frac{1}{x^2}\right) = f(x) + \left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2, \forall x \in \mathbb{R}^*$ .

OLIMPIADĂ IRAN

*Soluție.* Luând  $x = 1$  în (iii) obținem că  $f(2) = 2$ , prin urmare  $M \geq 2$ . Fie  $n \in \mathbb{N}^*$  cel mai mic număr natural cu proprietatea că  $f(x) < n, \forall x \in \mathbb{R}^*$ ; avem că  $n > 2$ .

Putem găsi  $a \in \mathbb{R}^*$  astfel încât  $f(a) \geq n-1$  și atunci

$$\left(f\left(\frac{1}{a}\right)\right)^2 = f\left(a + \frac{1}{a^2}\right) - f(a) < n - (n-1) = 1,$$



prin urmare  $f\left(\frac{1}{a}\right) > 1$ . Apăsând în [ViitoriOlimpici.ro](http://ViitoriOlimpici.ro) pentru  $x = \frac{1}{a}$  obținem că [Gazeta Matematică și ViitoriOlimpici.ro](http://GazetaMatematica.ro)

$$(n-1)^2 \leq (f(a))^2 = f\left(\frac{1}{a} + a^2\right) - f\left(\frac{1}{a}\right) < n-1.$$

Deducem că  $n \in \{1, 2\}$  și astfel am ajuns la o contradicție. □

#### 4. EDIȚIA A IV-A - 23 AUGUST 2013

**Problema 1.** *Determinați numerele naturale nenule  $n$  pentru care se poate construi o mulțime de numere complexe  $M$ , având  $n$  elemente, cu proprietățile:*

- (i)  $|z| = 1$ , oricare ar fi  $z \in M$ ;
- (ii)  $\sum_{z \in M} z = 0$ ;
- (iii)  $z + w \neq 0$ , oricare ar fi  $z, w \in M$ .

VIITORIOLIMPICI.RO

*Soluție.* Evident, valorile  $n = 1$  și  $n = 2$  nu convin. Orice număr impar  $n \geq 3$  este bun: alegem  $M = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$ .

Valoarea  $n = 4$  nu convine: dacă  $M = \{a, b, c, d\}$ , atunci  $a, b, c, d$  vor fi afixele vârfurilor unui patrulater inscriptibil  $ABCD$ . Notăm cu  $P(p)$  și  $Q(q)$  mijloacele laturilor  $AB$ , respectiv  $CD$ . Cum  $2p = a + b$  și  $2q = c + d$ , condiția  $a + b + c + d = 0$  arată că  $O$  este mijlocul segmentului  $PQ$ . Diametrul care trece prin mijlocul unei coarde (care nu este ea însăși diametru) este perpendicular pe acea coardă, prin urmare  $PQ$  este perpendiculară atât pe  $AB$ , cât și pe  $CD$  și  $O$  se află la egală distanță de aceste două coarde. Rezultă că patrulaterul  $ABCD$  este dreptunghi, ceea ce contrazice (iii).

Orice număr par  $n \geq 6$  este bun: alegem

$$M = \{z \in \mathbb{C} \mid z^{n-3} = 1\} \cup \{wz \mid z^3 = 1\},$$

unde  $w = \cos \alpha + i \sin \alpha$ , cu  $\alpha \notin \{r\pi \mid r \in \mathbb{Q}\}$ .

în concluzie,  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2, 4\}$ . □

#### Problema 2.

a) Fie  $ABCD$  un patrulater convex. Arătați că discurile având ca diametre laturile  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  și  $DA$  acoperă în întregime interiorul patrulaterului  $ABCD$ .

GAZETA MATEMATICĂ 6-7-8/2013

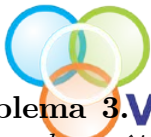
b) Fie  $ABCD$  un patrulater. Demonstrați că discurile având ca diametre segmentele  $AB$ ,  $AC$  și  $AD$  acoperă în întregime interiorul triunghiului  $BCD$ .

*Soluție.* a) Fie  $M$  un punct în interiorul patrulaterului  $ABCD$ ; atunci

$$\angle AMB + \angle BMC + \angle CMD + \angle DMA = 360^\circ.$$

Rezultă că cel puțin unul dintre cele patru unghiuri are măsura de măcar  $90^\circ$ . Dacă  $\angle AMB$  este un astfel de unghi,  $M$  aparține discului de diametru  $AB$  și, de aici, cerința problemei.

b) Notăm cu  $P$ ,  $Q$  și  $R$  proiecțiile vârfului  $A$  pe dreptele  $BC$ ,  $CD$  respectiv  $DB$ . Indiferent de natura patrulaterului  $ABCD$  (convex sau concav), patrulaterul de vârfuri  $BPAR$ ,  $CPAQ$  și  $DQAR$  sunt înscrise în cercurile de diametre  $AB$ ,  $AC$  respectiv  $AD$  și, împreună cu interioarele lor, acoperă interiorul triunghiului  $BCD$ . Cu atât mai mult, discurile având ca diametre segmentele  $AB$ ,  $AC$  și  $AD$  vor acoperi interiorul triunghiului  $BCD$ . □



**Problema 3.** Se dau  $m$  numere naturale distincte din mulțimea  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Demonstrați că putem alege câteva dintre ele, cu suma  $S$ , astfel încât

$$0 \leq S - \frac{m(m+1)}{2} \leq n + \sqrt{2n} - m.$$

ADRIAN ZAHARIUC

*Soluție.* Fie  $a_1 < a_2 < \dots < a_m$  cele  $m$  numere date. Notăm cu  $j$  indicele minim pentru care

$$a_1 + a_2 + \dots + a_j \geq \frac{m(m+1)}{2}$$

și cu  $i$  indicele maxim pentru care

$$a_i + a_{i+1} + \dots + a_m \geq \frac{m(m+1)}{2}.$$

Notând  $S = a_i + a_{i+1} + \dots + a_m$ , este îndeplinită prima inegalitate.

Din maximalitatea lui  $i$ , avem

$$S \leq a_i + \frac{m(m+1)}{2} - 1. \quad (1)$$

Din minimalitatea lui  $j$ , deducem că

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{j-1} < \frac{m(m+1)}{2} \leq a_i + \dots + a_{j-1} + a_j \Rightarrow$$

$$a_j > a_1 + \dots + a_{i-1} \geq 1 + 2 + \dots + (i-1) = \frac{i(i-1)}{2}.$$

Dar  $n \geq a_j$ , și prin urmare  $i < \sqrt{2n} + 1$ . Rezultă că

$$a_i \leq n - m + i < n - m + \sqrt{2n} + 1. \quad (2)$$

Din relațiile (1) și (2) obținem că, pentru  $S$ , este îndeplinită (strict) și a doua inegalitate din enunț.  $\square$

#### 5. EDIȚIA A V-A - 27 AUGUST 2014

**Problema 1.** Considerăm numerele complexe  $a, b, c$ , având același modul. Arătați că

$$\left| \frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right| + \left| \frac{a}{c} - \frac{c}{a} \right| + \left| \frac{b}{c} - \frac{c}{b} \right| \leq 3\sqrt{3}.$$

VIITORIOLIMPICI.RO

*Soluție.* Fie  $|a| = |b| = |c| = \rho$ . Atunci

$$\sum \left| \frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right| = \sum \left| \frac{a^2 - b^2}{ab} \right| = \frac{1}{\rho^2} \sum |a^2 - b^2|.$$

Se consideră punctele  $A(a^2)$ ,  $B(b^2)$  și  $C(c^2)$ . Ele sunt situate pe cercul cu centrul în origine și raza  $\rho^2$ . Relația din enunț se rescrie sub forma

$$AB + BC + CA \leq 3\rho^2\sqrt{3}.$$

Vom arăta că în orice triunghi  $ABC$ , înscris în cercul de rază  $R$ , este adevărată inegalitatea

$$AB + BC + CA \leq 3R\sqrt{3}.$$

Într-adevăr, via teorema sinusurilor, relația precedentă revine la

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2},$$



iar această fapt rezultă din inegalitatea lui Jensen aplicată funcției concave

$$\sin : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}.$$

□

**Problema 2.** Determinați numerele reale  $x \in (\log_5 2, +\infty)$  cu proprietatea că

$$(3^x + 2)^{\log_5 3} + 2 = (5^x - 2)^{\log_3 5}.$$

GAZETA MATEMATICĂ 6-7-8/2014

*Soluție.* Ecuația din enunț se poate scrie sub forma

$$3^{\log_5(3^x+2)} + 2 = 5^{\log_3(5^x-2)}.$$

Cu notațiile  $y = \log_5(3^x + 2)$  și  $z = \log_3(5^x - 2)$ , obținem  $3^y + 2 = 5^z$ . Deducem că  $x = \log_5(3^z + 2)$  și  $z = \log_3(3^y + 2)$ . Fie funcția

$$f : (\log_5 2, +\infty) \rightarrow (\log_5 2, +\infty), f(t) = \log_5(3^t + 2).$$

Atunci  $f(x) = y, f(y) = z, f(z) = x$ .

Funcția  $f$  este strict crescătoare, obținându-se prin compunere de funcții strict crescătoare. Din considerente de simetrie circulară, putem presupune fie că  $x \leq y \leq z$ , fie că  $x \geq y \geq z$ ; ne plasăm în primul caz, cel de-al doilea tratându-se similar. Rezultă că  $f(x) \leq f(y) \leq f(z)$ , adică  $y \leq z \leq x$  și, de aici,  $x = y = z$ . □

**Problema 3.**

a) Determinați  $n \in \mathbb{N}^*$ , știind că inegalitatea  $|\cos nx| \leq n|\cos x|$  este adevărată pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .

b) Determinați  $x \in \mathbb{R}$ , știind că inegalitatea  $|\cos nx| \leq n|\cos x|$  este adevărată pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ .

GHEORGHE IUREA

*Soluție.* Pentru  $x \in \mathbb{R}$ , considerăm  $P(n) : |\cos nx| \leq n|\cos x|$ . Presupunând că  $P(n)$  este adevărată, vom arăta că și  $P(n+2)$  este adevărată. Avem:

$$\begin{aligned} |\cos(n+2)x| &= |\cos nx \cdot \cos 2x - \sin nx \cdot \sin 2x| \\ &\leq |\cos nx| \cdot |\cos 2x| + 2|\sin x| \cdot |\cos x| \cdot |\sin nx| \\ &\leq |\cos nx| + 2|\cos x| \leq n|\cos x| + 2|\cos x| \\ &= (n+2)|\cos x|. \end{aligned}$$

a) Pentru  $n$  par,  $P(n)$  nu poate fi adevărată pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ ; de exemplu, pentru  $x = \frac{\pi}{2}$ , am obține  $1 \leq 0$ , fals. Cum  $P(1)$  este adevărată (cu egalitate) pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ , rezultă că  $P(n)$  este adevărată pentru  $n$  impar, oricare ar fi  $x \in \mathbb{R}$ .

b)  $P(n)$  este adevărată oricare ar fi  $n \in \mathbb{N}^*$  pentru acele valori ale lui  $x$  pentru care este adevărată  $P(2)$ ; avem deci de rezolvat inecuația  $|\cos 2x| \leq 2|\cos x|$ . Notând  $c = |\cos x| \in [0, 1]$ , aceasta revine la  $-2c \leq 2c^2 - 1 \leq 2c, c \in [0, 1]$ . Deducem că  $c \in \left[\frac{\sqrt{3}-1}{2}, 1\right]$ . În final, obținem soluțiile

$$x \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left[ n\pi - \arccos \frac{\sqrt{3}-1}{2}, n\pi + \arccos \frac{\sqrt{3}-1}{2} \right].$$

□



**Problema 1.** Notăm cu  $\mathcal{F}$  mulțimea funcțiilor  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  cu proprietatea că

$$f(f(x) + y) = f(x) + f(y),$$

oricare ar fi numerele reale  $x$  și  $y$ .

- a) Determinați funcțiile injective din  $\mathcal{F}$ .  
b) Determinați funcțiile surjective din  $\mathcal{F}$ .

VIITOROLIMPICI.RO

*Soluție.* a) Relația din ipoteză conduce la  $f(f(x) + y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$  și  $f(f(y) + x) = f(y) + f(x), \forall x, y \in \mathbb{R}$ . Obținem imediat că

$$f(f(x) + y) = f(f(y) + x), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Deoarece  $f$  este injectivă, rezultă că

$$f(x) + y = f(y) + x \iff f(x) - x = f(y) - y, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Considerăm funcția  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(t) = f(t) - t$ . Funcția  $g$  verifică relația  $g(x) = g(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$ , așadar există  $a \in \mathbb{R}$  pentru care  $g(x) = a, \forall x \in \mathbb{R}$ .

În concluzie, funcțiile căutate sunt cele de forma

$$f(x) = x + a, \forall x \in \mathbb{R}$$

și se verifică faptul că aceste funcții sunt soluții ale problemei.

b) Fie  $f$  o funcție surjectivă din  $\mathcal{F}$ ; vom arăta că  $f$  este și injectivă. Pentru aceasta, fie  $a, b \in \mathbb{R}$  pentru care  $f(a) = f(b)$ . Din ipoteză, avem că

$$f(f(x)) = f(x) + f(0), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Există  $c, d \in \mathbb{R}$  pentru care  $f(c) = a$  și  $f(d) = b$ . Înlocuind  $x = c$ , apoi  $x = d$  în relația anterioară, obținem  $f(a) = a + f(0)$ , respectiv  $f(b) = b + f(0)$ . Din  $f(a) = f(b)$  rezultă că  $a + f(0) = b + f(0)$ , deci  $a = b$ .

Prin urmare, funcțiile surjective sunt injective și regăsim soluțiile de la punctul anterior.  $\square$

**Problema 2.** Considerăm două numere complexe  $u$  și  $v$ , având același modul, pentru care există  $a, b, c$  și  $d$  numere reale strict pozitive astfel încât  $\max\{a, b, c\} < d, a + d = b + c$  și

$$|au + dv| \leq |bu + cv|.$$

Demonstrați că  $u = v$ .

GAZETA MATEMATICĂ 6-7-8/2015

*Soluție.* Ultima relație din ipoteză se scrie succesiv:

$$\begin{aligned} & |au + dv|^2 \leq |bu + cv|^2 \\ \Leftrightarrow & (au + dv)(a\bar{u} + d\bar{v}) \leq (bu + cv)(b\bar{u} + c\bar{v}) \\ \Leftrightarrow & (a^2 + d^2)|u|^2 + ad(u\bar{v} + \bar{u}v) \leq (b^2 + c^2)|u|^2 + bc(u\bar{v} + \bar{u}v) \\ \Leftrightarrow & (a + d)^2|u|^2 - 2ad|u|^2 + ad(u\bar{v} + \bar{u}v) \leq (b + c)^2|u|^2 - 2bc|u|^2 + bc(u\bar{v} + \bar{u}v) \\ \Leftrightarrow & ad(u\bar{v} + \bar{u}v - 2|u|^2) \leq bc(u\bar{v} + \bar{u}v - 2|u|^2) \\ \Leftrightarrow & (ad - bc)(u\bar{v} + \bar{u}v - |u|^2 - |v|^2) \leq 0 \\ \Leftrightarrow & (bc - ad)|u - v|^2 \leq 0 \end{aligned}$$





Pe de altă parte, este adevărată inegalitatea  $bc > ad$ . Într-adevăr, putem presupune  $b \leq c$  și, cum  $d - c = b - a \stackrel{\text{not}}{=} r > 0$ , avem:

$$ad = (c + r)(b - r) = bc - r(c - b) - r^2 < bc.$$

Rezultă astfel că  $|u - v|^2 = 0$  și, de aici, concluzia problemei.  $\square$

**Problema 3.** Demonstrați că singurul număr natural  $n \geq 2$  cu proprietatea că

$$\sqrt{a + \sqrt{b + \sqrt{c}}} \geq \sqrt[n]{abc},$$

oricare ar fi numerele reale nenegative  $a, b$  și  $c$ , este  $n = 14$ .

GABRIEL POPA & PAUL GEORGESCU

*Soluție.* Pentru început, demonstrăm valabilitatea inegalității pentru cazul  $n = 14$ . Formula de dezvoltare a binomului conduce la

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^{n-k} y^k \geq C_n^{n-1} xy^{n-1} = nxy^{n-1}, \forall x, y \in [0, \infty), \forall n \geq 2.$$

Avem:

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{a + \sqrt{b + \sqrt{c}}}\right)^{14} &= \left(a + \sqrt{b + \sqrt{c}}\right)^7 \geq 7a \left(\sqrt{b + \sqrt{c}}\right)^6 \\ &= 7a (b + \sqrt{c})^3 \geq 21abc \geq abc, \end{aligned}$$

de unde obținem

$$\sqrt{a + \sqrt{b + \sqrt{c}}} \geq \sqrt[14]{abc}, \forall a, b, c \in [0, \infty).$$

Demonstrăm acum că, oricare ar fi  $n \geq 2, n \neq 14$ , există valori  $a, b, c \in [0, \infty)$  pentru care inegalitatea din enunț este falsă. Considerând  $a = x^2, b = x^4$  și  $c = x^8$ , unde  $x \geq 0$ , un număr  $n$  care are proprietatea dorită trebuie să verifice inegalitatea

$$(\star) \quad x\sqrt{1 + \sqrt{2}} \geq x^{\frac{14}{n}}, \forall x \in [0, \infty).$$

Dacă  $n < 14$ , relația  $(\star)$  conduce la

$$\left(\sqrt{1 + \sqrt{2}}\right)^{\frac{n}{14-n}} \geq x, \forall x \in (0, \infty),$$

ceea ce nu este posibil (valorile mari ale lui  $x$  conduc la contradicții). Dacă  $n > 14$ , relația  $(\star)$  conduce la

$$x^{\frac{n-14}{n}} \geq \sqrt{\sqrt{2} - 1}, \forall x \in (0, \infty),$$

fapt care, din nou, nu este adevărat (valorile apropiate de 0 ale lui  $x$  conduc la contradicții).  $\square$



**Problema 1.** Fie  $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$  și numerele  $a_1, a_2, \dots, a_n \in (0, \infty)$ , astfel încât  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$ . Demonstrați inegalitatea:

$$\frac{\log_{a_1}^2 a_2}{na_1 + n - 1} + \frac{\log_{a_2}^2 a_3}{na_2 + n - 1} + \dots + \frac{\log_{a_n}^2 a_1}{na_n + n - 1} \geq 1.$$

GAZETA MATEMATICĂ

*Soluție.* Pentru început avem

$$\begin{aligned} & \frac{\log_{a_1}^2 a_2}{na_1 + n - 1} + \frac{\log_{a_2}^2 a_3}{na_2 + n - 1} + \dots + \frac{\log_{a_n}^2 a_1}{na_n + n - 1} \\ & \geq \frac{(\log_{a_1} a_2 + \log_{a_2} a_3 + \dots + \log_{a_n} a_1)^2}{na_1 + n - 1 + \dots + na_n + n - 1} \\ & = \frac{(\log_{a_1} a_2 + \log_{a_2} a_3 + \dots + \log_{a_n} a_1)^2}{n(a_1 + a_2 + \dots + a_n) + n^2 - n} \\ & = \left( \frac{\log_{a_1} a_2 + \log_{a_2} a_3 + \dots + \log_{a_n} a_1}{n} \right)^2. \end{aligned}$$

.....  
 Ipoteza conduce la concluzia că numerele  $\log_{a_1} a_2, \log_{a_2} a_3, \dots, \log_{a_n} a_1$  sunt pozitive, deci putem aplica inegalitatea mediilor. Apoi avem

$$\begin{aligned} \frac{\log_{a_1} a_2 + \log_{a_2} a_3 + \dots + \log_{a_n} a_1}{n} & \geq \sqrt[n]{\log_{a_1} a_2 \cdot \log_{a_2} a_3 \cdot \dots \cdot \log_{a_n} a_1} \\ & = \sqrt[n]{\log_{a_1} a_1} = 1, \end{aligned}$$

ceea ce conduce la concluzia problemei. □

**Problema 2.** Fie  $n \in \mathbb{N}^*$ . Câte numere naturale de  $n$  cifre, formate doar cu cifrele 1, 9, 8, 6, sunt divizibile cu 3?

VIITORI OLIMPLICI.RO, 2015-2016

*Soluție.* Fie  $x_n$  numărul căutat; evident că  $x_1 = 2$ .

Dacă  $A$  este un număr de  $n + 1$  cifre ca în enunț, suma primelor  $n$  cifre ale lui  $A$  poate fi de forma  $3k, 3k + 1$  sau  $3k + 2$ . În cazul în care suma primelor  $n$  cifre este de forma  $3k$ , mai putem completa doar cu 6 sau 9, deci avem  $2x_n$  posibilități de alegere pentru  $A$ . Dacă suma primelor  $n$  cifre este de forma  $3k + 1$ , mai putem completa doar cu 8, iar dacă suma primelor  $n$  cifre este de forma  $3k + 2$ , mai putem completa doar cu 1.

Cum există  $4^n$  numere de  $n$  cifre formate cu cifrele 1, 9, 8, 6, vom avea  $4^n - x_n$  numere  $A$  care nu au suma primelor  $n$  cifre divizibilă cu 3. Obținem relația de recurență  $x_{n+1} = 2x_n + 4^n - x_n = x_n + 4^n$ .

Dând valori lui  $n$  și sumând egalitățile găsite, deducem că  $x_n = 4^{n-1} + 4^{n-2} + \dots + 4^1 + x_1$ , de unde

$$x_n = \frac{4^n - 4}{3} + 2 = \frac{4^n + 2}{3}.$$

□

**Problema 3.** Fie  $z, w \in \mathbb{C}$ . Se numește **produsul real** al numerelor complexe  $z$  și  $w$  numărul complex notat  $z \times w$ , definit prin:

$$z \times w = \frac{\bar{z}w + \bar{w}z}{2}.$$

*Demonstrați că:*

- a)  $z \times (w - u) = z \times w - z \times u, \forall z, w, u \in \mathbb{C}$ ;  
 b) Dacă  $Z$  și  $W$  sunt imaginile geometrice ale numerelor complexe  $z$  și  $w$ , atunci  $OZ \perp OW$  dacă și numai dacă  $z \times w = 0$ ;  
 c) Fie trapezul  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$ ), dreptunghic în  $A$ , iar  $M$  mijlocul laturii ( $AD$ ). Perpendicularele din  $A$  pe  $MB$ , respectiv din  $D$  pe  $MC$  se intersectează în  $N$ . Demonstrați că  $MN \perp BC$ .

\*\*\*

*Soluție.* a) Verificare prin calcul direct.

b) Avem echivalențele  $OZ \perp OW \Leftrightarrow OZ^2 + OW^2 = ZW^2 \Leftrightarrow |z|^2 + |w|^2 = |z - w|^2 \Leftrightarrow \bar{z}w + \bar{w}z = 0 \Leftrightarrow z \times w = 0$ .

c) Alegem originea sistemului în  $M$ . Restul afixelor le notăm cu litere mici analoge literelor mari. Ipoteza devine  $d + a = 0, b \times (n - a) = 0$  și  $c \times (n - d) = 0$ . De aici  $b \times a = b \times n$  și  $c \times n = c \times d$ . Atunci  $n \times (b - c) = n \times b - n \times c = b \times a - c \times d$ . Dar  $MA \perp AB \Rightarrow a \times (a - b) = 0 \Rightarrow a \times b = |a|^2$ . Analog  $c \times d = |d|^2$ . Atunci  $n \times (b - c) = |a|^2 - |d|^2 = 0$ , ceea ce încheie problema.  $\square$

## 8. EDIȚIA A VIII-A - 17 AUGUST 2017

**Problema 1.**

- a) Fie funcția concavă  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Demonstrați că, oricare ar fi  $a, b \in \mathbb{R}$ , funcția  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definită prin  $g(x) = f(ax + b)$  este concavă;  
 b) Să se rezolve ecuația  $\log_5 x \cdot \log_4 (27 - x) = 1$ .

GAZETA MATEMATICĂ

*Soluție.* a) Fie  $x, y \in \mathbb{R}$  și  $t \in [0, 1]$ . Avem

$$\begin{aligned} g(tx + (1-t)y) &= f(atx + a(1-t)y + b) \\ &= f(t(a+b) + (1-t)(ay+b)) \\ &\geq tf(ax+b) + (1-t)f(ay+b) \\ &= tg(x) + (1-t)g(y), \end{aligned}$$

deci  $g$  este concavă.

b) Observăm că  $x = 25$  este soluți. Ecuația se rescrie  $\lg x \cdot \lg (27 - x) = \lg 4 \cdot \lg 5$ , adică

$$\lg \lg x + \lg \lg (27 - x) = \lg \lg 4 + \lg \lg 5.$$

Deducem că, dacă  $x$  este soluție, atunci și  $27 - x$  este soluție.

Funcția  $g : (1, 26) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \lg \lg x + \lg \lg (27 - x)$  este concavă, conform punctului anterior. Atunci ecuația anterioară are cel mult două soluții. Acestea sunt 2 și 25.  $\square$

**Problema 2.** Notăm cu  $\mathcal{P}$  mulțimea tuturor punctelor unui plan. Considerăm o funcție  $f : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$  cu proprietatea că, oricare ar fi paralelogramul  $XYZT$ , avem  $f(X) + f(Z) = f(Y) + f(T)$ .

- a) Arătați că, dacă  $M$  este mijlocul segmentului  $[AB]$ , atunci  $f(M) = \frac{f(A) + f(B)}{2}$ ;  
 b) Arătați că, dacă  $G$  este centrul de greutate al triunghiului  $ABC$ , atunci  $f(G) = \frac{f(A) + f(B) + f(C)}{3}$ .



*Soluție.* **a)** Fie  $C$  un punct necolinar cu  $A$  și  $B$ . Fie  $P, Q$  mijloacele segmentelor  $[CA]$ , respectiv  $[CB]$ . Atunci  $AMQP$  și  $BQPM$  sunt paralelograme. Rezultă  $f(A) + f(Q) = f(M) + f(P)$  și  $f(B) + f(P) = f(M) + f(Q)$ . Adunăm cele două relații și obținem concluzia.

**b)** Fie  $M$  mijlocul lui  $[AB]$ , iar  $P$  simetricul lui  $G$  față de  $M$ . Atunci  $G$  este mijlocul lui  $CP$ , deci  $f(C) + f(P) = 2f(G)$ . Dar  $GAPB$  este paralelogram, de unde  $f(A) + f(B) = f(G) + f(P)$ . Adunăm cele două egalități și obținem concluzia.  $\square$

**Problema 3.** Fie  $n \in \mathbb{N}$  și mulțimea  $A = \{1, 2, \dots, n\}$ .

- a)** Demonstrați că există  $3^n$  perechi ordonate de mulțimi  $(X; Y)$  cu proprietatea  $X \cup Y = A$ ;  
**b)** Determinați numărul de triplete ordonate de mulțimi  $(X; Y; Z)$  cu proprietatea  $X \cup Y \cup Z = A$ .

*Soluție.* **a)** Pentru  $\text{Card } X = r$ , avem  $Y = (A \setminus X) \cup B$ , unde  $B \subset X$ . Prin urmare, sunt  $2^r$  moduri de alegere a mulțimii  $Y$ . Deoarece elementele lui  $X$  se pot alege în  $C_n^r$  moduri, rezultă că numărul total de perechi ordonate  $(X; Y)$  este  $\sum_{r=0}^n C_n^r \cdot 2^r = 3^n$ .  $\square$

*Proof.* **b)** Pentru  $\text{Card } X = r$ , avem  $n - r \leq \text{Card}(Y \cup Z) \leq n$ . Atunci există  $p \in \{0, 1, 2, \dots, r\}$  astfel încât  $\text{Card}(Y \cup Z) = n - r + p$ . Elementele mulțimii  $Y \cup Z$  sunt cele din  $A \setminus X$ , plus încă  $p$  elemente din  $X$ . Prin urmare, vom avea  $\sum_{p=0}^r C_r^p \cdot 3^{n-r+p} = 3^{n-r} \cdot 4^r$  moduri de alegere a perechii  $(Y; Z)$ .

Deoarece pentru mulțimea  $X$  există  $C_n^r$  moduri de alegere, atunci numărul total de triplete ordonate  $(X; Y; Z)$  este egal cu  $\sum_{r=0}^n C_n^r \cdot 3^{n-r} \cdot 4^r = 7^n$ .  $\square$

Succes tuturor!